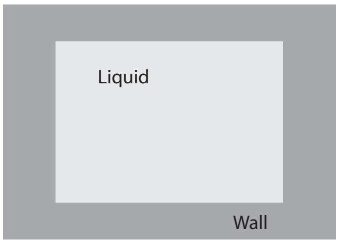
PHYSICS EXAM

Eine Flüssigkeit befindet sich in einem geschlossenen dickwandigen Behälter. Wir brauchen ein Modell, um die Temperaturen von Flüssigkeit und Behälter zu berechnen.



Die Umgebungstemperatur T_a ist bekannt.

In der Flüssigkeit gibt es einen mechanischen Rührer, dessen mechanische Leistung $\mathcal{P}$ bekannt ist.

Die Flüssigkeit hat eine Masse m_F und eine konstante Entropiekapazität k_F.

Der Behälter hat eine Masse m_B und eine konstante Entropiekapazität k_B.

Der Entropieleitwert zwischen Flüssigkeit und Behälter ist G_1, derjenige zwischen Behälter und Umwelt G_2.

Vernachlässigen Sie die Entropieproduktion wegen Entropietransport.

a. Für welche Grösse(n) machen Sie Bilanzen? Wieviele Bilanzgleichungen wird Ihr Modell enthalten? Warum?
b. Formulieren Sie diese Bilanzgleichung(en).
c. Erklären Sie die hier aufgeführten Gleichungen (was sagen sie aus?).

(1) $S_F = m_F k_F T_F$

(2) $S_B = m_B k_B T_B$

(3) $\Pi_S = \dfrac{\mathcal{P}}{T_F}$

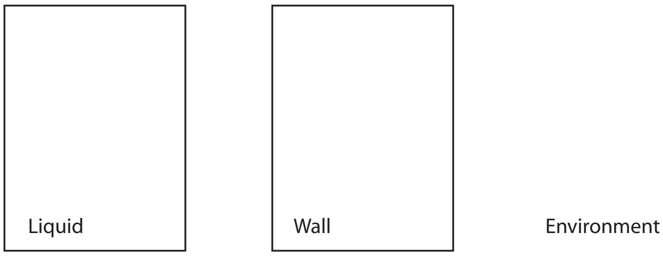
(4) $I_{S1} = G_1 \left(T_F - T_B \right)$

(5) $I_{S2} = G_2 \left(T_B - T_a \right)$

d. Leiten Sie die Differentialgleichung(en) in Normalform her. Sie sollen dazu die Temperaturen T_F und T_B von Flüssigkeit und Behälter als Zustandsgrössen nehmen.
e. Formulieren Sie Anfangsbedingungen für die Differentialgleichungen.
f. Sind die Differentialgleichungen linear oder nicht linear? Warum?
g. Was ist der Unterschied im Typ der Differentialgleichungen, wenn die Umgebungstemperatur konstant ist, oder wenn sie zeitlich vairabel ist?

SOLUTION

a. Laws of balance for entropy of liquid and of container: two blance equations. The system is divided into two uniform parts: Liquid and container. This is the minimum to obtain equations for the temperatures of the two bodies.



b.

$$\frac{dS_F}{dt} = \Pi_S - I_{S1}$$
$$\frac{dS_F}{dt} = I_{S1} - I_{S2}$$

Enropy production due to heat flow is neglected.

c. The first two equations are the capacitive relations for liquid and container, respectively (they hold in this special form for constant capacitances).(3) denotes the relation between energy dissipated (dissipation rate), temperature at which dissipation takes place, and entropy production rate. (4) and (5) are resistive relations for entropy flows from the fluid to the (center of the) container and from the (center of the) container to the environment; the flows are proportional to their driving temperature differences (G_S stands for entropy conductance).

d.

$$\frac{d}{dt}\left(m_F k_F T_F\right) = \frac{\mathcal{P}}{T_F} - G_1\left(T_F - T_B\right)$$
$$\frac{d}{dt}\left(m_B k_B T_B\right) = G_1\left(T_F - T_B\right) - G_2\left(T_B - T_a\right)$$

$$\frac{dT_F}{dt} = \frac{1}{m_F k_F}\left(\frac{\mathcal{P}}{T_F} - G_1\left(T_F - T_B\right)\right)$$
$$\frac{dT_B}{dt} = \frac{1}{m_B k_B}\left(G_1 T_F - \left(G_1 + G_2\right)T_B + G_2 T_a\right)$$

e.

$$T_F\left(0\right) = T_{F0} \quad , \quad T_B\left(0\right) = T_{B0}$$

f. The equations are nonlinear because of the dissipation term (temperature in the denominator)

g. If the ambient temperature is constant, the equations are autonomous. With time dependent ambient temperature, the equations are non-autonomous.