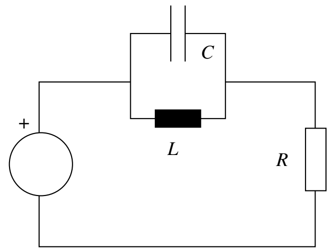
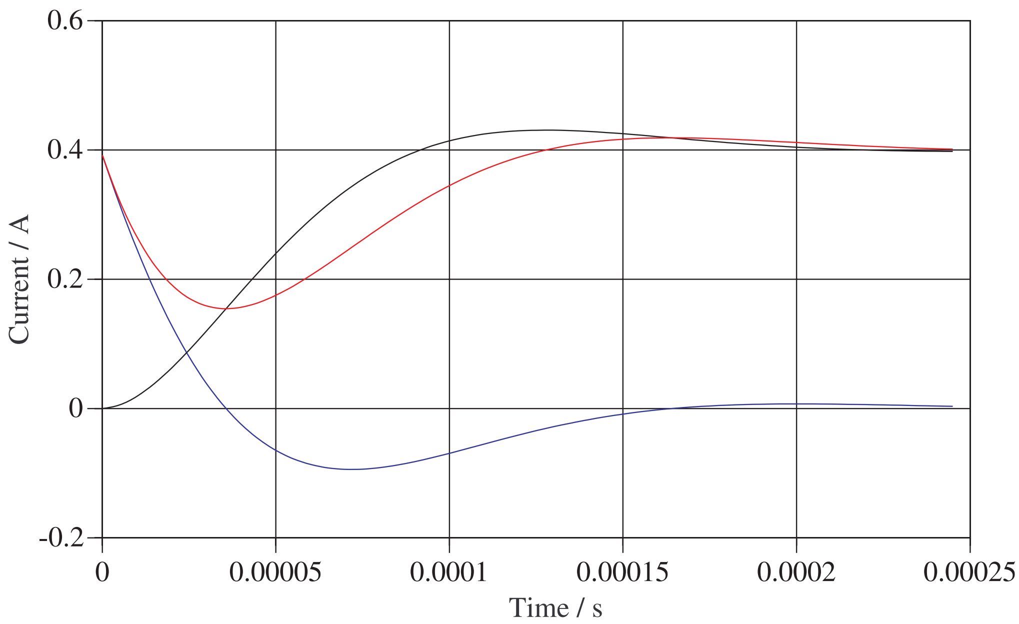
Physics und Systemwissenschaft, SS 2007

Zweites Semester Wirtschaftsingenieur, WI06a-b

1. Die nebenstehend skizzierte Schaltung wurde zur Zeit $t = 0$ mit der Batterie, die eine Spannung von 10V hat, verbunden. Die Grafik zeigt die Stromstärken durch das (reine) induktive Element, das Widerstandselement und den Kondensator.

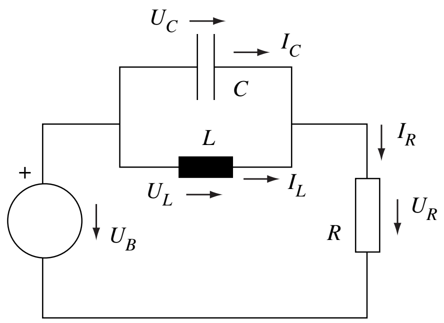




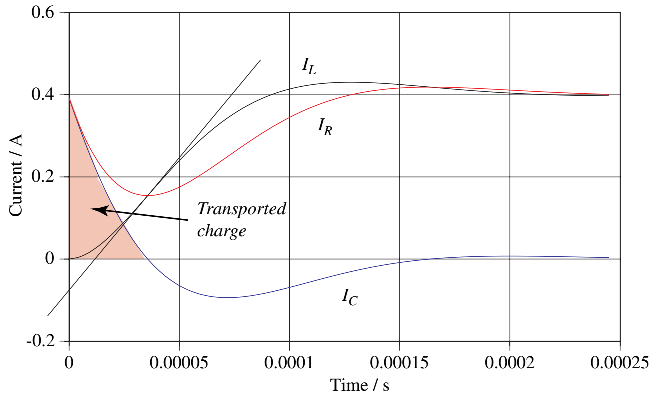
   a. Ordnen Sie die Kurven in der Graphik den Elementen zu (mit Erklärung).
   b. Bestimmen Sie mit Hilfe der Daten aus der Graphik die Werte der Elemente (d.h. Widerstand, Kapazität und Induktivität).
   c. Formulieren Sie alle Gleichungen des dynamischen Modells des Stromkreises (inklusive Anfangsbedingungen). Sie müssen die Gleichungen nicht weiter verarbeiten (kein Einsetzen, etc.). Vorzeichen müssen stimmen.
   d. (Zusatzpunkte) Verarbeiten Sie das Modell zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Spannung über dem Kondensator und Anfangsbedingungen.

Solutions

Electric circuit



a.



Zuerst sind die Spannungen über dem Kondensator und dem induktiven Element null (Anfangsbedingung: keine Ladung im Kondensator; Maschensatz: UL = UC). Also ist die Spannung über dem Widerstandselement maximal (Maschensatz: UB = UR + UC). Also ist der Strom IR anfangs maximal (IR = UR/R). Der Strom geht anfänglich durch den Kondensator und den Widerstand (Anfangsbedingung: IL = 0), also ist am Anfang IC = IR. Am Ende geht der Strom durch den Induktor und den Widerstand. Also fangen IR und IC bei 0.4 A an, IL bei null. Von den beiden Kurven IC und IR geht IC gegen null (wenn der Kondensator geladen ist, fliesst kein Strom durch ihn).

b. Am Anfang ist UR = 10V und IR = 0.4 A, also ist der Widerstand 10 / 0.4 Ω = 25 Ω.

Bis IC = 0A ist, sind 6.28e–6 C Ladung in den Kondensator geflossen (Fläche unter IC Kurve). Zu diesem Zeitpunkt ist die Spannung über dem Kondensator 10 V – 25·0.156 V = 6.1 V (10 V minus Spannung über Widerstand). Also ist C = Q/UC = 6.28e–6 C / 6.1 V = 1.03e–6 F.

Zum gleichen Zeitpunkt ist die Spannung über dem Induktor auch gleich 6.1 V. Die Ändeurngsrate des Stromes IL ist in diesem Moment 0.624 A / 9.66e–5 s = 6460 A/s. Also ist L = UL / dIL/dt = 6.1 / 6460 H = 0.94 mH.

c. Laws of balance

$$\frac{dQ_C}{dt} = I_C$$
$$I_C + I_L = I_R$$

Loop rules:

$$U_C = U_L$$
$$U_B = U_C + U_R$$

Constitutive laws:

$$U_C = \frac{1}{C}Q$$
$$U_L = L\frac{dI_L}{dt}$$
$$U_R = RI_R$$

Initial conditions:

$$Q(0) = 0$$
$$I_L(0) = 0$$

d.

$$U_L = L\frac{dI_L}{dt} \quad , \quad U_L = U_C \quad \Rightarrow \quad U_C = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_L = I_R - I_C \quad \Rightarrow \quad U_C = L\frac{d}{dt}\left(I_R - I_C\right)$$

$$I_R = \frac{U_R}{R} \quad , \quad I_C = \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad U_C = L\frac{d}{dt}\left(\frac{U_R}{R} - \frac{dQ}{dt}\right)$$

$$U_R = U_B - U_C \quad , \quad Q = CU_C \quad \Rightarrow \quad U_C = L\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\left(U_B - U_C\right) - \frac{d}{dt}\left(CU_C\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad U_C = L\frac{d}{dt}\left(\frac{U_B}{R}\right) - L\frac{d}{dt}\left(\frac{U_C}{R}\right) - LC\frac{d^2U_C}{dt^2} = -\frac{L}{R}\frac{d}{dt}\left(U_C\right) - LC\frac{d^2U_C}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad DE: \quad \frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{CR}\frac{d}{dt}\left(U_C\right) + \frac{1}{LC}U_C = 0$$

$$IC1: \quad U_C(0) = 0$$

$$\frac{dU_C}{dt}(0) = \frac{I_C(0)}{C} = \frac{I_R(0)}{C} = \frac{U_R(0)}{CR} = \frac{U_B}{CR}$$

$$IC2: \quad \frac{dU_C}{dt}(0) = \frac{U_B}{CR}$$