PHYSICS EXAM

1. Öl mit einer Viskosität von 1000 cP (centi-Poise, 1 P = 0.1 Pa·s) soll durch eine 200 km lange Pipeline gepumpt werden. Die Dichte des Oels ist 900 kg/m^3. Die Pipeline hat einen Durchmesser von 80 cm. Die Pumpe baut einen Druck von 20 bar auf. Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf des laminaren Oelstroms (er fängt bei Null an).

2. Modell einer Lagerhaltung. Ein Lager enthält eine Menge (*M*) eines Produktes. Das Lager wird durch Produktion (Produktionsrate *P*) gefüllt und durch eine Verkaufsrate (*V*) geleert. Nehmen Sie an, die Verkaufsrate sei konstant.

   Es gibt eine erwünschte Menge (*E*) des Produkts im Lager. Wenn die Lagermenge *M* von *E* abweicht, wird die Produktionsrate *P* geändert. *E* ist konstant.

   Machen Sie folgende Annahmen zur Änderung von *P*. Die Differenz zwischen erwünschter Lagermenge *E* und der tatsächlichen Lagermenge *M* ist proportional zur Änderungsrate von *P*. Man führt einen konstanten "Trägheitsfaktor" oder Verzögerungsfaktor *L* ein, um den Zusammenhang zwischen der Lagerdifferenz und der Änderungsrate von *P* zu berechnen (grössere Trägheit führt zu einer kleinern Änderungrate von *P*).

a. Skizzieren Sie das Diagramm eines systemdynamischen Modells, das der gegebenen Beschreibung entspricht.

b. Formulieren Sie alle Gleichungen des Modells. Welche Gleichung entspricht einem Bilanzgesetz in der Physik? Welche Gleichung entspricht einem Induktionsgesetz in der Physik? Welche Grösse entspricht einer Druckdifferenz (oder einer Spannung)? Welche Einheit hat *L*?

c. Wie lauten die beiden Differentialgleichungen des Modells? Wie lauten die dazugehörigen Anfangsbedingungen?

d. Zeigen Sie durch Umformen, dass man aus den beiden Differentialgleichungen in c eine Differentialgleichung zweiter Ordnung erhält:

$$\frac{d^2M}{dt^2} + \frac{1}{L}M = \frac{1}{L}E$$

e. Für den Fall dass $E = 0$ ist, kennen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung. Ist die Lösung eine gedämpfte oder eine ungedämpfte Schwingung? Wie gross ist die Periode dieser Schwingung?

f. Zusatz. Was ist die Lösung der Gleichung in d?

Lösungen

1. Starting of a current of oil leads to the typical exponential function going asymptotically from zero to a maximal value:

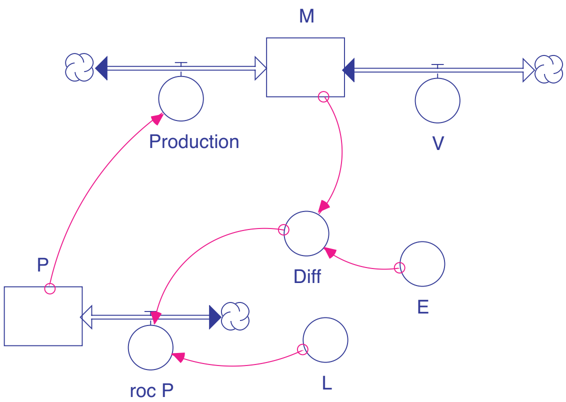
$$I_V(t) = I_{V,\max}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right)$$
$$I_{V,\max} = \frac{1}{R_V}\Delta p_{tot}$$
$$\tau_L = \frac{L_V}{R_V}$$
$$L_V = \frac{\rho l}{\pi r^2} \quad , \quad R_V = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$$

Viscosity of oil: 1000 cP = 10 P = 1.0 Pa·s.

$$I_{V,\max} = \frac{1}{R_V}\Delta p_{tot} = \frac{\pi r^4}{8\eta l}\Delta p_{tot} = \frac{\pi \cdot 0.40^4}{8 \cdot 1.0 \cdot 2.0 \cdot 10^5} 2.0 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} = 0.10 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$
$$\tau_L = \frac{L_V}{R_V} = \frac{\rho l}{\pi r^2}\frac{\pi r^4}{8\eta l} = \frac{\rho r^2}{8\eta} = \frac{900 \cdot 0.40^2}{8 \cdot 1.0}\mathrm{s} = 18\ \mathrm{s}$$

2. Inventory model

a.



b.

$$\frac{dM}{dt} = P - V$$
$$\frac{dP}{dt} = \frac{Diff}{L}$$
$$Diff = E - M$$

First equation: Law of balance. Second equation: analogous to law of induction. Diff: analogous to pressure difference. Unit (dimension) of L: time squared.

c.

$$\frac{dM}{dt} = P - V \quad , \quad M(0) = M_0$$
$$\frac{dP}{dt} = \frac{E - M}{L} \quad , \quad P(0) = P_0$$

d. Take derivative of first equation:

$$\frac{d^2M}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(P - V\right) = \frac{dP}{dt} = \frac{E - M}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2M}{dt^2} + \frac{1}{L}M = \frac{1}{L}E$$

e. This is an undamped oscillation. Factor 1/L is equal to angualr frequency squared:

$$\Omega^2 = \frac{1}{L} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{L}$$

f. General solution:

$$M\left(t\right) = E + \left(M_0 - E\right)\cos\left(\Omega\, t\right) + \left(P_0 - V\right)\frac{1}{\Omega}\sin\left(\Omega\, t\right)$$

If the initial production rate equals V, then

$$M\left(t\right) = E + \left(M_0 - E\right)\cos\left(\Omega\, t\right)$$