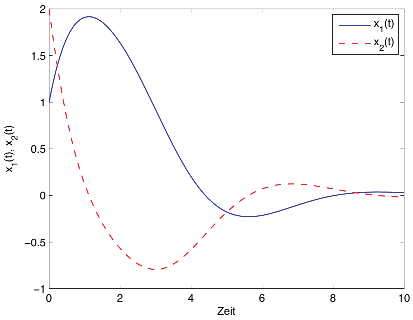
amPhysik und Systemwissenschaft

End of Semester Exam, June 2008

Zweites Semester Wirtschaftsingenieurwesen, WI07a-b

1. Betrachten Sie das dynamische System, das durch die folgenden beiden Differentialgleichungen 1. Ordnung beschrieben wird:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a\sin(x_1) - bx_2$$



   a. Fassen Sie die beiden Differentialgleichungen zu einer einzigen Differentialgleichung 2. Ordnung zusammen. Diese Gleichung soll nur noch x_1 als dynamische Grösse enthalten.

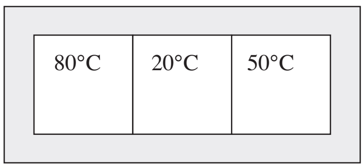
   b. Für die Anfangswerte $x_1(t = 0) = 1$ und $x_2(t = 0) = 2$ und $a = b = 1$ ergibt sich die Lösung des Differentialgleichungssystems im nebenstehenden Diagramm (Vergrösserung siehe hinten). Stellen Sie diese Lösung als Bahn im Zustandsraum dar.

   c. Ermitteln Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems.

   d. Bestimmen Sie die x_1- und x_2-Nullklinen für $a = b = 1$ und stellen Sie sie im Bereich $-\pi \le x_1 \le \pi$ grafisch dar.

   e. In Ihrer Skizze aus Teilaufgabe d gibt es 4 Gebiete, welche bezüglich der Vorzeichen beider Komponenten des Vektorfeldes homogen sind. Geben Sie für alle diese Gebiete die Vorzeichen der x_1- und x_2-Komponente des Vektorfelds an.

2. Ein Gefäss hat drei nebeneinander liegende Kammern aus dünnem Blech (Grösse einer Kammer: 10 mal 10 mal 10 cm). Jede Kammer ist mit je einem Liter Wasser gefüllt. Die Anfangstemperaturen sind 80°C, 20°C und 50°C. Nach aussen sind die drei Kammern perfekt wärmeisoliert. Vernachlässigen Sie Reibung von Rührern.



   a. Was heisst “wärmeisoliert” formal in einem Modell? Beschreiben Sie das mit Worten und Gleichung(en).

   b. Gibt es in diesem System Entropieproduktion, wenn man die Reibung der Rührer vernachlässigt? Mit Begründung!

   c. Skizzieren Sie das Diagramm eines systemdynamischen Modells, mit dem Sie das Verhalten des Systems simulieren können. Bauen Sie das Modell auf der *Energie* auf.

   d. Der konvektive Wärmeübergangskoeffizient von Wasser in einer Kammer an das Blech beträgt 400 W/(K·m^2). Bestimmen Sie den (Energie)Leitwert vom Wasser in einer Kammer an das Wasser in der benachbarten Kammer.

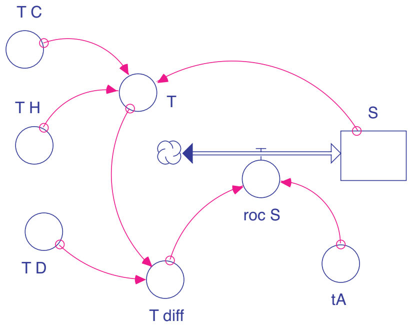
e. Bestimmen Sie Änderungsraten der drei Temperaturen gerade am Anfang.

f. Skizzieren Sie die Temperaturen als Funktionen der Zeit. Benutzen Sie Berechnungen, um die Skizze so realistisch wie möglich zu machen (mit Zahlenangaben auf den Achsen, Zeitkonstanten sichtbar).

3. Eine Person steht unter der Dusche und passt die Stellung S des Mischgriffs für kaltes (T_C) und warmes (T_H) Wasser an. Die Mischtemperatur des Wassers (T) ergibt sich aus

$$T = T_C + \left(T_H - T_C\right) S$$

Die Stellung S des Griffs sei eine Zahl ohne Einheit zwischen 0 und 1. Null bedeutet, dass nur kaltes Wasser kommt, 1 heisst, dass nur das heisse Wasser kommt. Die Figur zeigt das Diagramm eines möglichen Modells des Angleichs der Stellung S auf eine gewünschte Wassertemperatur (T_D).



a. Leiten Sie die oben gegebene Gleichung für die Mischtemperatur T des Wassers aus der Thermodynamik her.

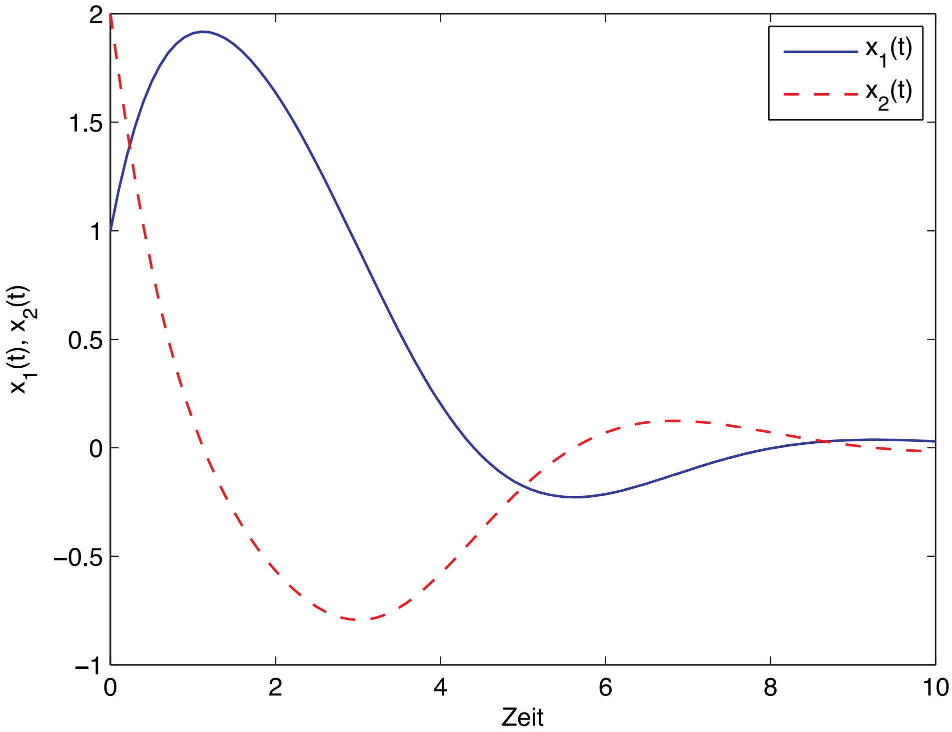
b. Die Person ändert die Stellung des Mischgriffs mit einer Geschwindigkeit (roc S, roc: rate of change), die linear von der Differenz zwischen gewünschter Temperatur und der Mischtemperatur abhängig gemacht wird. Zur Formulierung eines Modells für diesen Vorgang führt man eine Art Trägheitsfaktor für den Angleich t_A ein (grösserer Trägheitsfaktor gibt langsameres Angleichen). Formulieren Sie die diesen Ideen entsprechende Gleichung für die Schnelligkeit der Anpassung (roc S) der Stellung S.

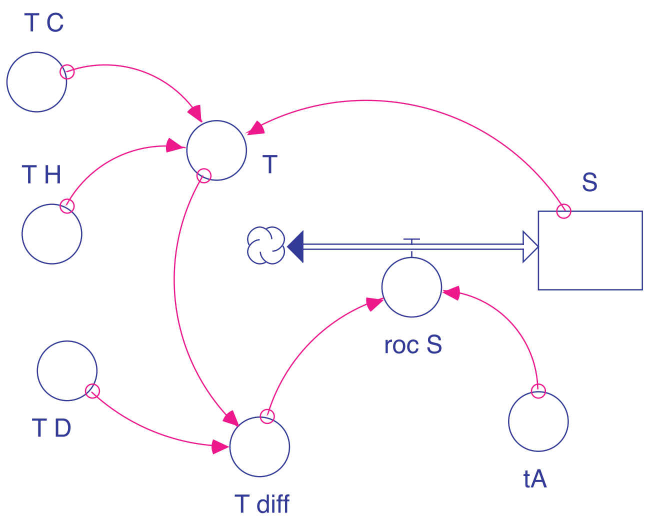
c. Formulieren Sie sämtliche Gleichungen des Modells.

d. Transformieren Sie die Gleichungen in eine einzige Differentialgleichung für die Stellung S.

e. Nehmen Sie 20°C und 60°C für die kalte und die heisse Temperatur, 40°C für die gewünschte Temperatur, und 50 K·s für den Trägheitsfaktor t_A. Wie gross ist die Zeitkonstante in diesem Modell?

f. Skizzieren Sie die Temperatur des Wassers für die Parameter entsprechend Aufgabe e so realistisch wie möglich (Zeitkonstante und Asymptote sichtabar). Die Anfangsbedingung sei $T(0) = 20°C$ (Stellung $S(0) = 0$).


x_1(t)
x_2(t)
$x_1(t), x_2(t)$
Zeit
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
0
2
4
6
8
10


T C
T H
T
S
roc S
T D
T diff
tA

Solutions

1. Dynamical system

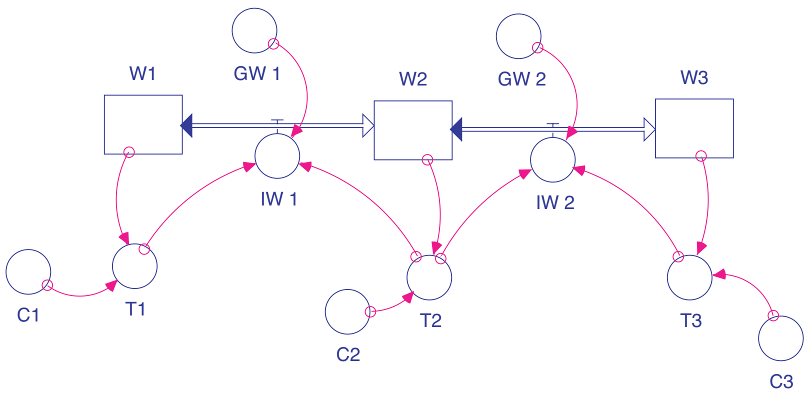
See last pages.

2. Thermal equilibration

a. Thermally insulated means that there is no exchange of entropy between a body and its environment. Formally, this means that I_S,net = 0.

b. Yes, the flow of entropy from a hotter to a cooler body is irreversible: there is entropy production as the result of the transport of entropy.

c.

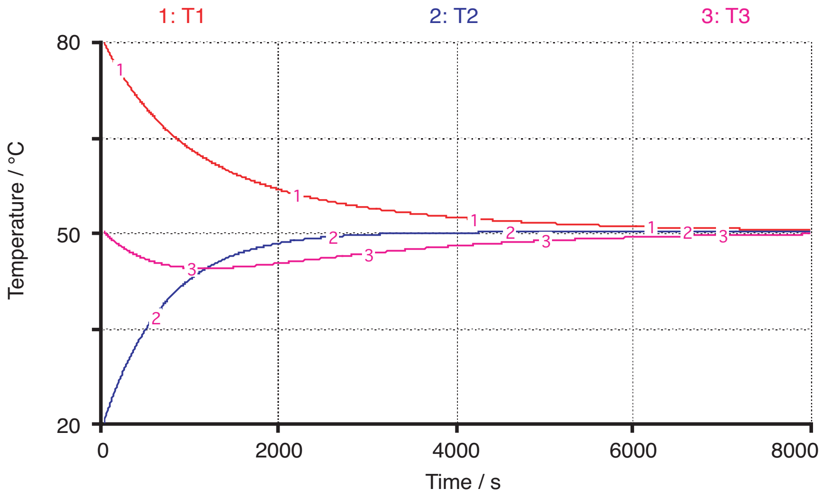


d. Neglect the effect of the thin metal wall separating two bodies of water, only take into account the convective transition layers on either side: G_W = A·h = 0.10·0.10·1/(1/400 + 1/400)) W/K = 2.0 W/K.

e. Balance of energy for 1.0 kg of water each:

$$\dot{W}_1 = -I_{W1} \quad , \quad \dot{W}_1 = C\dot{T}_1 \quad , \quad I_{W1} = G_W\left(T_1 - T_2\right)$$
$$\dot{T}_1 = -\frac{G_W}{C}\left(T_1 - T_2\right) = -\frac{2.0}{4200}\left(80 - 20\right)\frac{\text{K}}{\text{s}} = -0.0286\,\frac{\text{K}}{\text{s}}$$
$$\dot{W}_2 = I_{W1} + I_{W2} \quad , \quad \dot{W}_2 = C\dot{T}_2$$
$$I_{W1} = G_W\left(T_1 - T_2\right) \quad , \quad I_{W2} = G_W\left(T_3 - T_2\right)$$
$$\dot{T}_2 = \frac{G_W}{C}\left[\left(T_1 - T_2\right) + \left(T_3 - T_2\right)\right] = \frac{2.0}{4200}\left[60 + 30\right]\frac{\text{K}}{\text{s}} = 0.0429\,\frac{\text{K}}{\text{s}}$$
$$\dot{W}_3 = -I_{W2} \quad , \quad \dot{W}_3 = C\dot{T}_3 \quad , \quad I_{W2} = G_W\left(T_3 - T_2\right)$$
$$\dot{T}_3 = -\frac{G_W}{C}\left(T_3 - T_2\right) = -\frac{2.0}{4200}\left(50 - 20\right)\frac{\text{K}}{\text{s}} = -0.0143\,\frac{\text{K}}{\text{s}}$$

f.



3. Shower

a. Calculating the temperature of a mixture of cold and hot water (use balance of energy):

$$T_{mix} = \frac{cm_C T_C + cm_H T_H}{c(m_C + m_H)} = \frac{m_{tot}(1-S)T_C + m_{tot} S T_H}{m_{tot}} = (1-S)T_C + ST_H$$

b. Constitutive expression for rate of change of S:

$$roc\ S = \frac{T_{diff}}{t_A}$$

c. Collect model equations:

$$\frac{dS}{dt} = roc\ S$$
$$roc\ S = \frac{T_{diff}}{t_A}$$
$$T_{diff} = T_D - T$$
$$T = T_C + (T_H - T_C)S$$

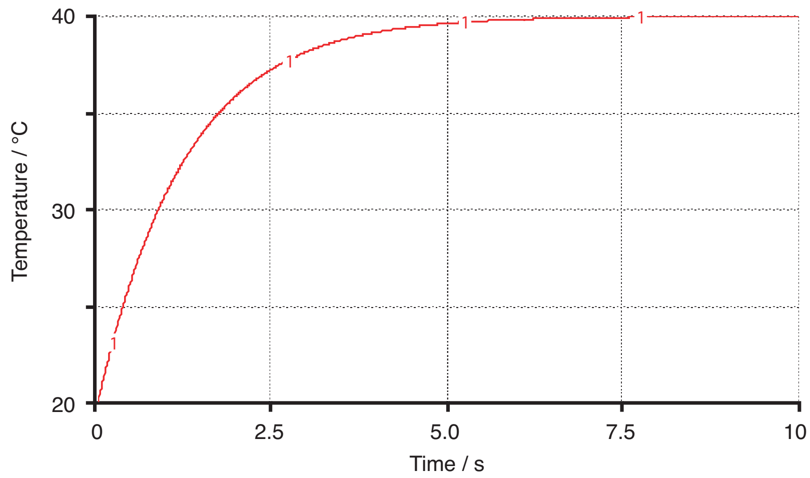
d. Transform equations:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{T_{diff}}{t_A} = \frac{T_D - T}{t_A} = \frac{T_D - [T_C + (T_H - T_C)S]}{t_A}$$
$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} + \frac{T_H - T_C}{t_A} S = \frac{T_D - T_C}{t_A}$$

e. The time constant equals the inverse of the factor multiplying S in the differential equation:

$$\tau = \frac{t_A}{T_H - T} = \frac{50}{60-20}\frac{\text{K}\cdot\text{s}}{\text{K}} = 1.25\,\text{s}$$

f.



Aufgabe 1 (13 Punkte)

a) $\dot{x}_1 = x_2 \longrightarrow \ddot{x}_1 = \dot{x}_2$ (3 Punkte)

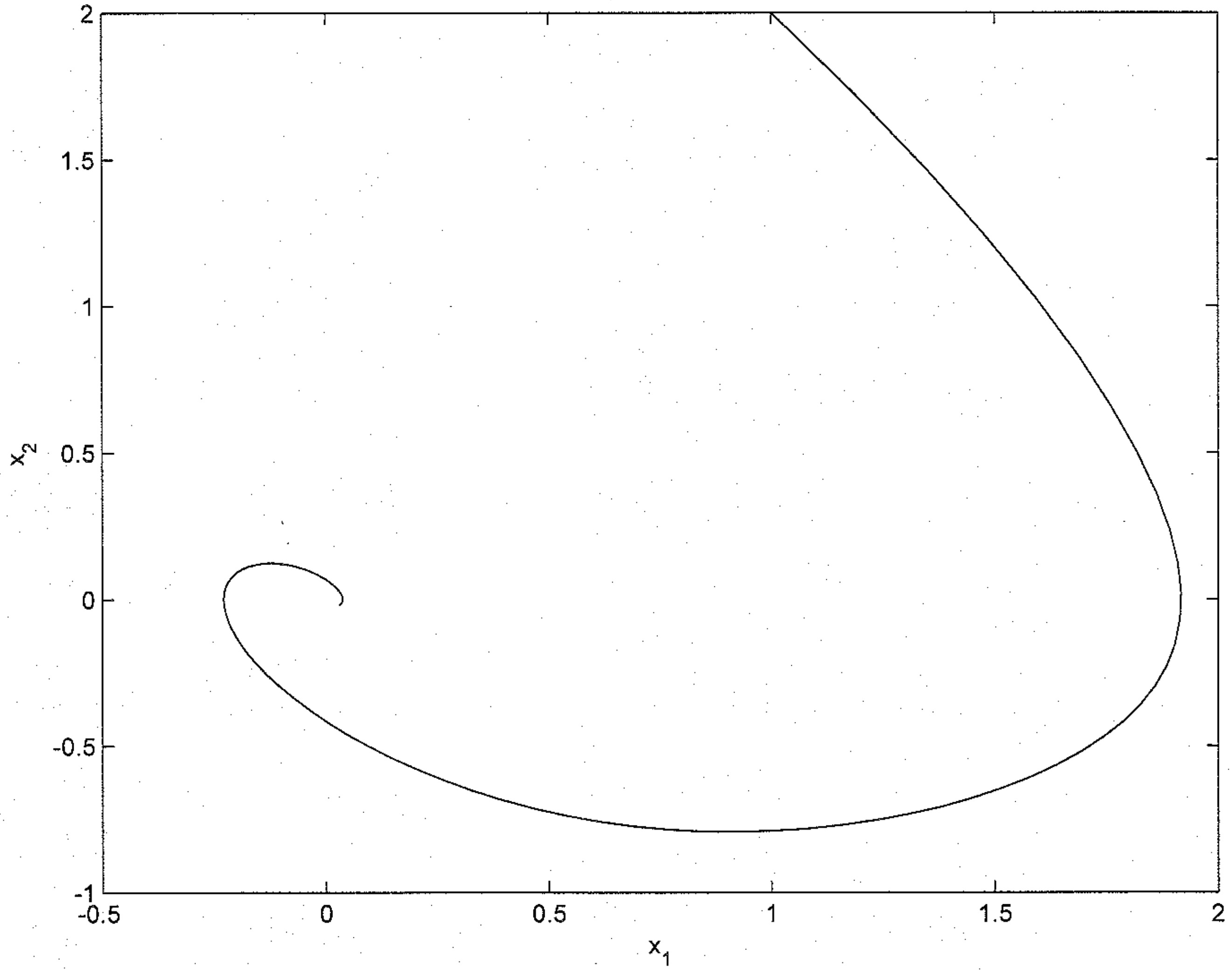
$\dot{x}_2 = -a \sin(x_1) - b x_2 \longrightarrow \ddot{x}_1 = -a \sin(x_1) - b \dot{x}_1$

b) separates Blatt (3 Punkte)

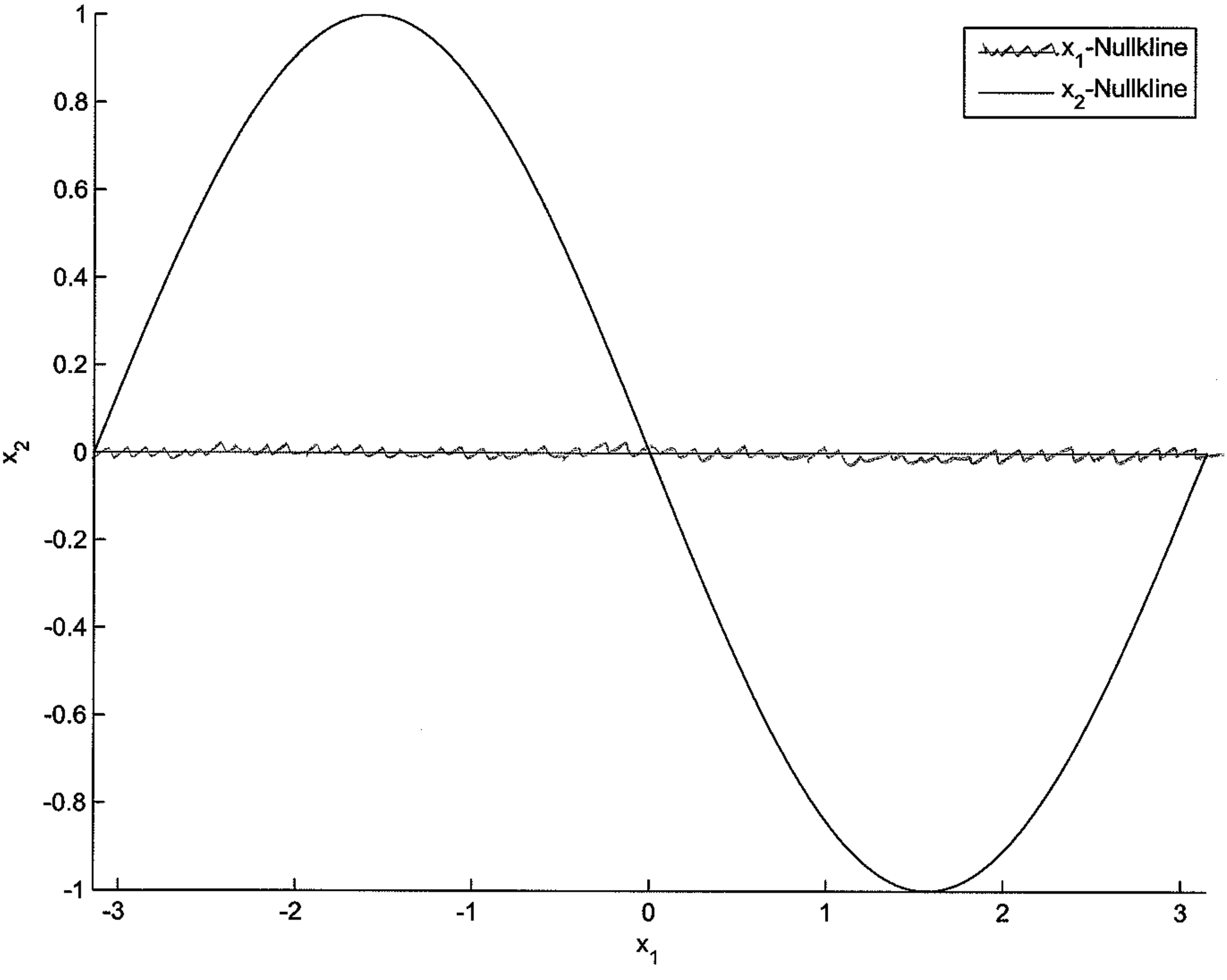
c) $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} N \cdot \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ (3 Punkte)

d)/e) separates Blatt (je 2 Punkte)

1b

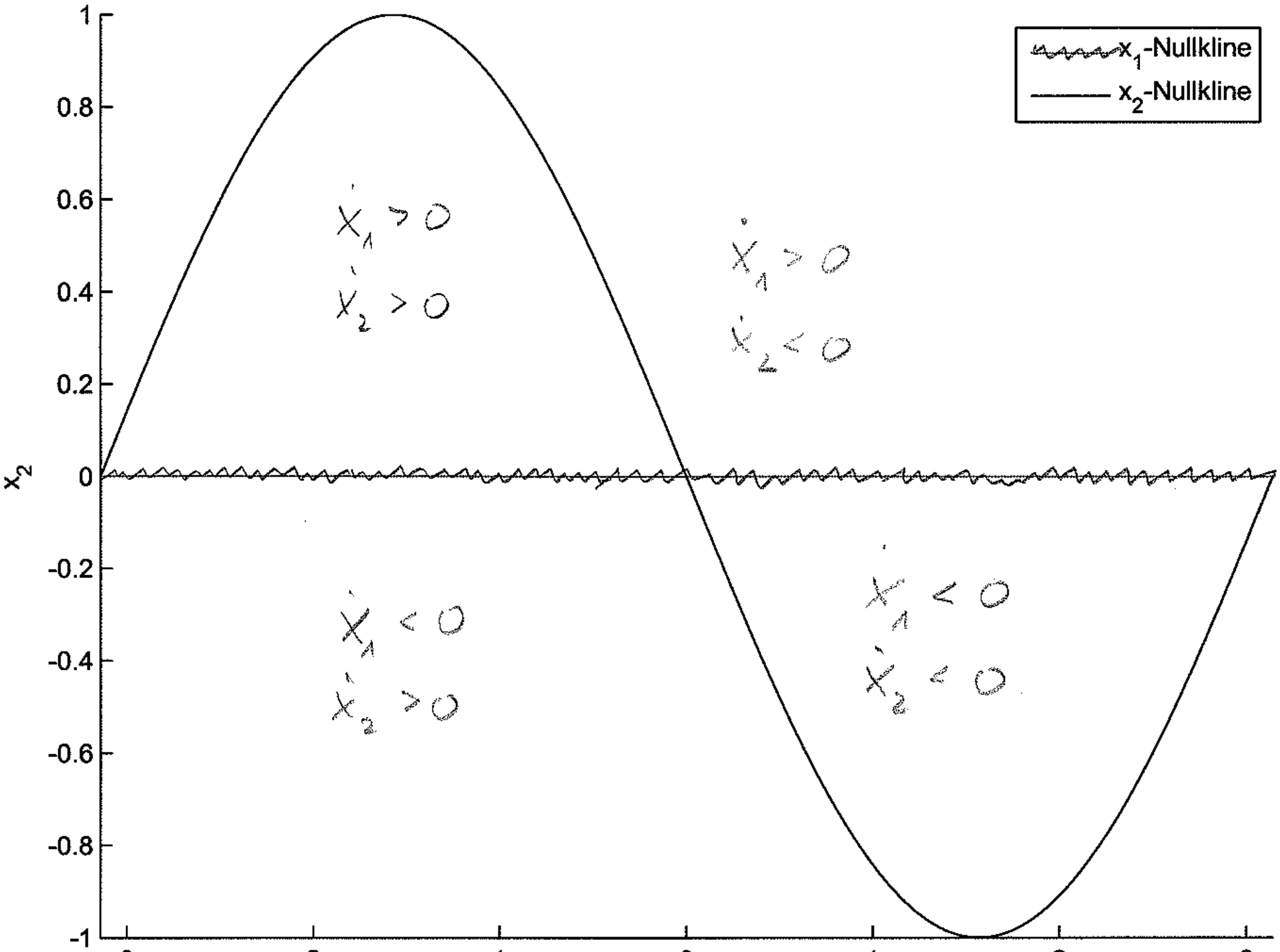


1 d



x1-Nullkline
x2-Nullkline
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
x2
-3
-2
-1
0
1
2
3
x1

1e



$\dot{x}_1$-Nullkline
x_2-Nullkline
$\dot{x}_1 > 0$
$\dot{x}_2 > 0$
$\dot{x}_1 > 0$
$\dot{x}_2 < 0$
$\dot{x}_1 < 0$
$\dot{x}_2 > 0$
$\dot{x}_1 < 0$
$\dot{x}_2 < 0$
x_1
x_2