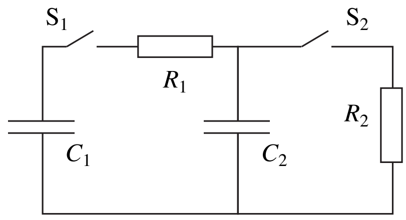
Physik und Systemwissenschaft

Test, November 2008

Erstes Semester WI08

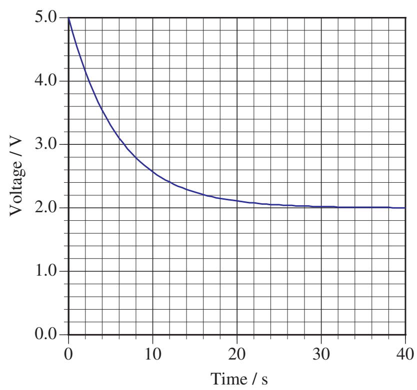
Verhalten eines Zwei-Tank-Modells



In der Figur ist ein elektrischer Stromkreis abgebildet. Widerstandswerte und Kapazitäten sind konstant. Separate ausgemessen wurde der erste Kondensator; seine Kapazität beträgt $C_1 = 1.0{\cdot}10^{-4}$ F.

Der Stromkreis soll hydraulisch modelliert werden. Rechnungen sind aber für den elektrischen Fall durchzuführen.

Anfangs ist der erste Kondensator geladen, der zweite nicht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ s schliesst man den ersten Schalter (S1), der zweite bleibt offen. Das Diagramm zeigt die elektische Spannung über dem ersten Kondensator. Auf der Rückseite ist eine Vergrösserung abgedruckt.



a. Skizzieren Sie ein hydraulisches System, das dem elektrischen entspricht. Erklären und beschriften Sie Ihre Skizze.

b. Skizzieren Sie das Diagramm (Flow Chart) eines systemdynamischen Modells für das *hydraulische* System. Benutzen Sie für die Beschriftung die selben Symbole für die Grössen wie in Ihrer Zeichnung.

c. Formulieren Sie alle Gleichungen für das *hydraulische* Modell.

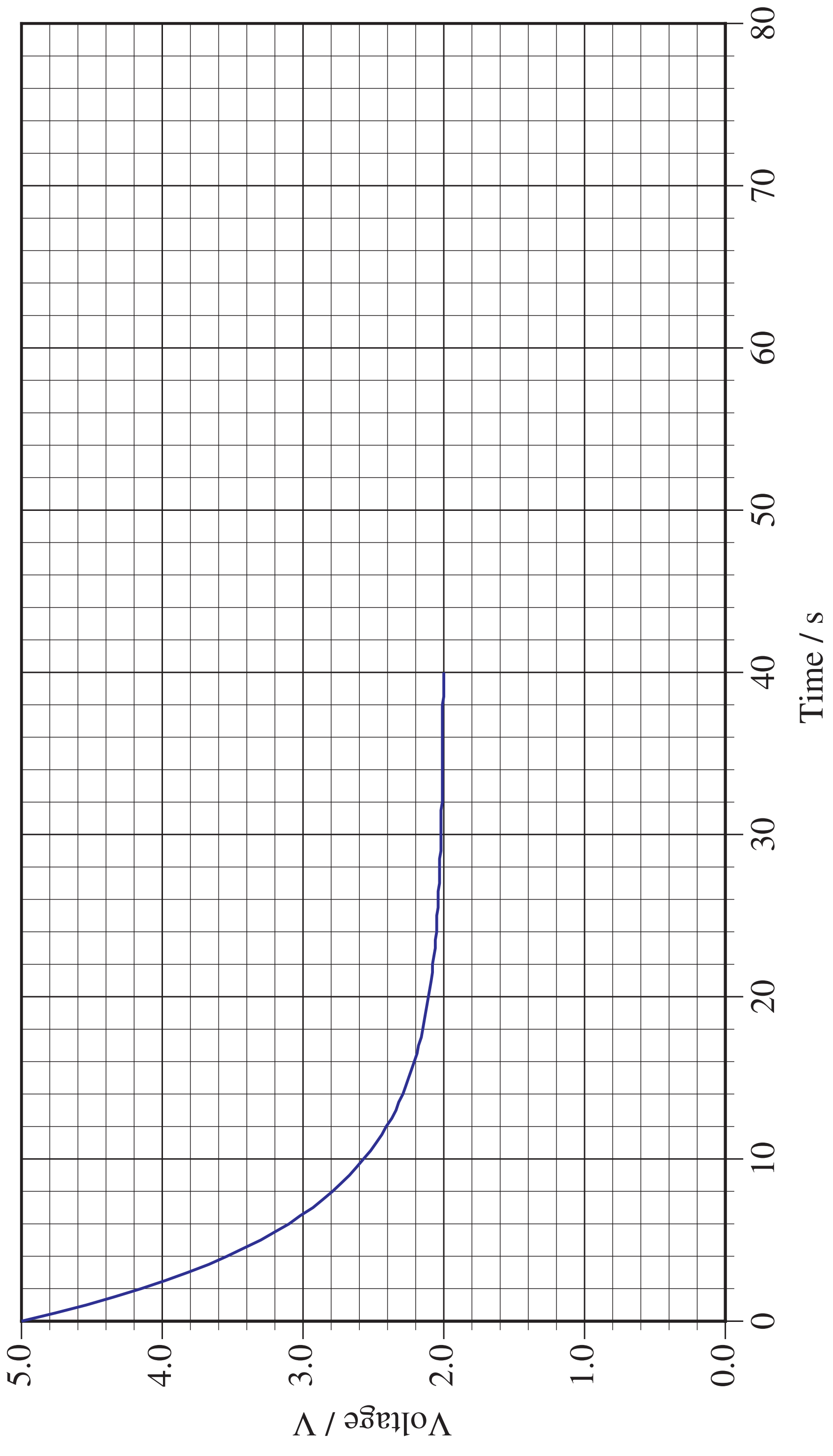
d. Skizzieren Sie den Verlauf der Spannung für den zweiten Kondensator für $0 \leq t \leq 40$ s im vergrösserten Diagramm auf Seite 2, und erklären Sie Ihre Antwort.

e. Bestimmen Sie die Kapazität des zweiten Kondensators. Erklären Sie Ihre Rechnung.

f. Zeigen Sie, wie man den Widerstand des Widerstandselementes zwischen den beiden Kondensatoren bestimmt (Sie sollten $10^5\ \Omega$ erhalten).

g. Zum Zeitpunkt $t = 40$ s wird der zweite Schalter geschlossen (der erste bleibt geschlossen). Wie gross werden die beiden Ströme und die Änderungsraten der Spannungen über den beiden Kondensatoren gleich nach 40 s sein? Der Widerstandswert des zweiten Widerstandes ist gleich dem des ersten.

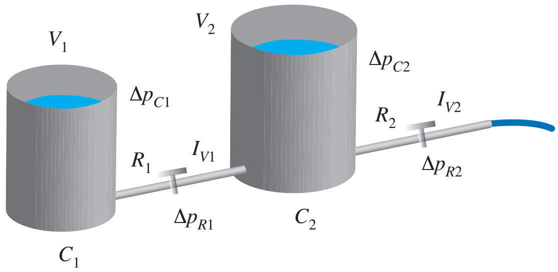
h. Skizzieren Sie den Verlauf der Spannungen über den beiden Kondensatoren bis 80 s im beiliegenden Diagramm. Erklären Sie Ihre Lösung.


Voltage / V
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.0
Time / s
0
10
20
30
40
50
60
70
80

Solutions

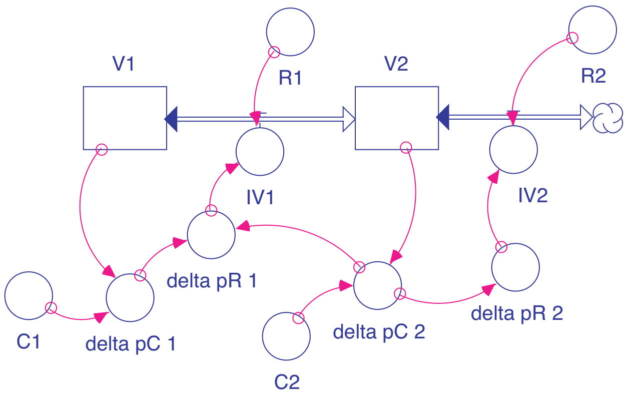
Model of windkessel pump

a. Two tanks connected by pipe, additional pipe for outflow, valves for each pipe. Two volumes, two flows. Pressure differences for fluid in tanks and for flows through pipes.

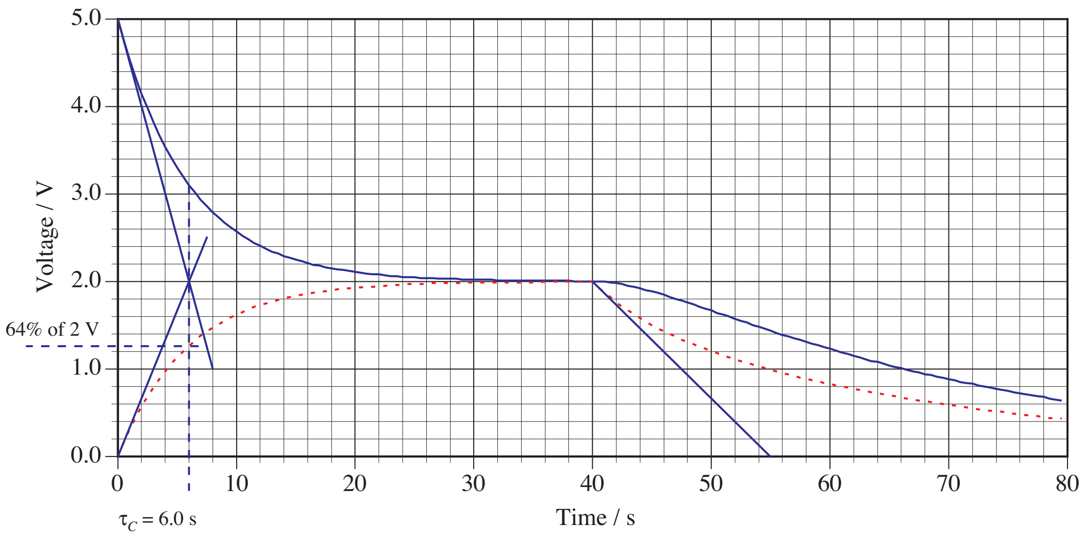


b. c.

```
dV1(t)/dt = - IV1
INIT V1 = C1*p1_init
dV2(t)/dt = IV1 - IV2
INIT V2 = C2*p2_init
IV1 = delta_pR_1/R1
IV2 = IF (TIME > 50) THEN
          delta_pR_2/R2 ELSE 0
delta_pC_1 = V1/C1
delta_pC_2 = V2/C2
delta_pR_1 = delta_pC_1-delta_pC_2
delta_pR_2 = delta_pC_2
```



d. The voltage UC2 of the second capacitor starts at zero and mirrors the curve of UC1. It will reach a value of 2.0 V. The speed of change is determined by the time constant which can be measured from the curve for UC1 (we get τC = 6.0 s).



e. Charge flows from C1 to C2 without flowing out. Therefore, the total charge of the two capacitors stays constant whereas the voltages equilibrate:

$$Q_{1,init} = Q_{1,final} + Q_{2,final}$$
$$C_1 U_{C1,init} = C_1 U_{C1,final} + C_2 U_{C2,final}$$
$$C_2 = \frac{C_1 U_{C1,init} - C_1 U_{C1,final}}{U_{C2,final}} = \frac{1.0 \cdot 10^{-4} \cdot 5.0 - 1.0 \cdot 10^{-4} \cdot 2.0}{2.0} \mathrm{F} = 1.5 \cdot 10^{-4} \mathrm{F}$$

f. Use the time constant to determine the rate of change of UC1 at t = 0 s, from that determine the rate of change of Q1 which is equal to IQ1, which is used to determine R1:

$$\left.\frac{dU_{C1}}{dt}\right|_{t=0} = \frac{U_{C1}(\tau_C) - U_{C1}(0)}{\tau_C} = \frac{2.0 - 5.0}{6.0} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} = -0.50 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$$
$$\left.\frac{dQ_1}{dt}\right|_{t=0} = C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} = 1.0 \cdot 10^{-4} (-0.50) \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = -0.50 \cdot 10^{-4} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$
$$|I_{V1}(0)| = \left| \left.\frac{dQ_1}{dt}\right|_{t=0} \right| = 0.50 \cdot 10^{-4} \mathrm{A}$$
$$R_1 = \frac{|U_{C1}(0) - 0|}{|I_{V1}(0)|} = \frac{5.0}{0.50 \cdot 10^{-4}} \Omega = 1.0 \cdot 10^5 \Omega$$

g.

$$|I_{V1}(40)| = \frac{|U_{C1}(40) - U_{C2}(40)|}{R_1} = 0 \mathrm{A}$$
$$|I_{V2}(40)| = \frac{|U_{C2}(40)|}{R_2} = \frac{2.0}{1.0 \cdot 10^5} = 2.0 \cdot 10^{-5} \mathrm{A}$$
$$\left.\frac{dU_{C1}}{dt}\right|_{t=40} = 0 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$$
$$\left.\frac{dU_{C2}}{dt}\right|_{t=40} = \frac{1}{C_2} \left.\frac{dQ_2}{dt}\right|_{t=40} = \frac{1}{C_2}\left(I_{Q1} - I_{Q2}\right) = \frac{1}{C_2}\left(0 - \frac{U_{C2}(40)}{R_2}\right)$$
$$= \frac{1}{1.5 \cdot 10^{-4}}\left(0 - \frac{2}{1.0 \cdot 10^5}\right) \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} = -0.133 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$$

h. See the graph on the previous page. The beginning of the function at t = 40 s can be constructed from the knoledge of the rates of changes of voltages (the first curve starts horizontally, the second has a slope according to –0.133 V/s). After that, UC1 must remain above UC2, the difference is determined by the resistances. The precise runs of the functions is difficult to determine by hand. (There is one indication: If we combine the two capacitors without a resistor between them, we get C_tot = 2.5·10–4 F. With R2 = 10^5 Ω, we have a time constant for discahrging of 25 s. This is a useful estimate for UC2.)