Physik und Systemwissenschaft

End of Semester Exam, January 2009

Erstes Semester Wirtschaftsingenieur, WI08a

Allgemeine Bemerkungen

Erlaubte Hilfsmittel: Wie von den Dozierenden angegeben.

Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt. Die Blätter für Aufgaben 1 und 2 müssen separat für Herrn Hosang abgegeben werden!

Schreiben Sie jedes Blatt an (Name, Datum, Prüfung, Nummer der Aufgabe).

Punkteverteilung:

Augabe 1: 5P

Augabe 2: 5P

Augabe 3: 17P

Augabe 4: 10P

3. Eine Photovoltaik Anlage besteht aus einem Array von 30 parallelgeschalteten Panels (je mit Diode und Widerstandselement R_1), einem Speicher (Kondensatorbank) und fünf kleinen Lampen (Verbraucher R_2; siehe Figur). Die Lampen werden jeweils in der Nacht an die Kondensatoren angeschlossen.

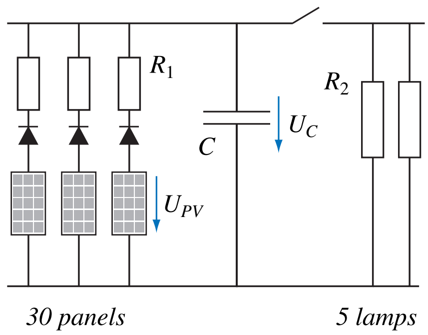
   Die Dioden sind nur dazu da, dass die Ladung nicht aus den Kondensatoren zurück durch den PV-Array fliesst. Nehmen Sie an, sie seien ideal (sie lassen Ladung für $U_D > 0$ ungehindert durch, für $U_D < 0$ gar nicht).

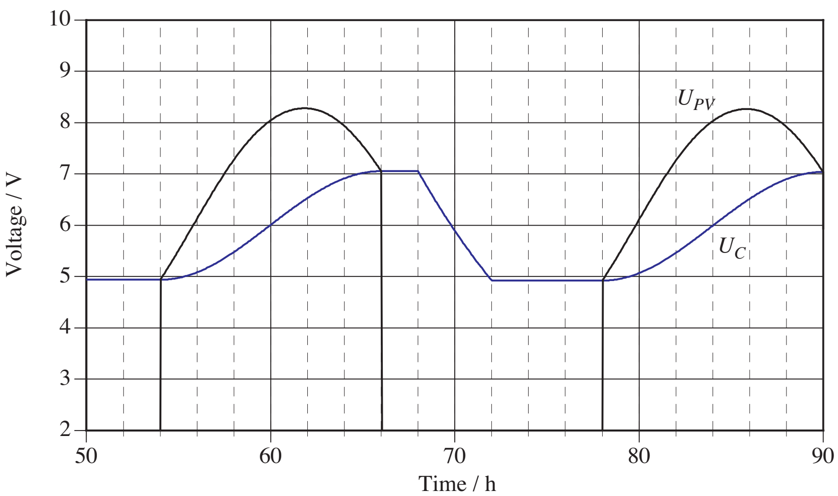
   Jedes Widerstandselement R_1 hat einen konstanten Widerstandswert von 10 Ω. Die Kondensatorbank entspricht einem einzigen Kondensator von $C = 80000$ F (80 kF).

   Die fünf Lampen sind parallel zueinender geschaltet, d.h., alle sind parallel zum Kondensator angebracht. Nehmen Sie an, jede Lampe habe im Betrieb einen *konstanten* Widerstandswert von 2.5 Ω. (Konstanter Widerstand ist natürlich unrealistisch, weil der Glühdraht seine Temperatur ändert, wenn die Spannung und die Stromstärke ändern.) Die Lampen werden von 20 Uhr bis 24 Uhr betrieben.

   Die Sonne scheint von 6 Uhr bis 18 Uhr. Die Energiestromdichte auf den Array ist dabei die erste Hälfte einer ganzen Sinusperiode, mit einem Maximalwert von 600 W/m².

   Das unten abgebildete Diagramm zeigt die Spannungen über dem Kondensator und über dem Array als Funktionen der Zeit.





   a. Skizzieren Sie ein hydraulisches System, das der elektrischen Schaltung entspricht. Fassen Sie alle Panels als einen Array zusammen, und alle Lampen als einen Verbraucher. Erklären Sie den Aufbau.

   b. Zeichnen Sie die Energiestromdichte des Sonnenlichts für den Array als Funktion der Zeit (für einen Tag von 0 Uhr bis 24 Uhr). Beschriften Sie die Achsen. Wieviel Energie wird auf die Photozellen des Arrays in einem Tag eingestrahlt? (Ein Panel hat 21 Zellen mit 15 cm² Fläche, der Array hat 30 Panels.)

c. Wie gross ist die Stromstärke beim Laden der Kondensatoren gerade am Mittag (12 Uhr)? Wie gross ist dann die elektrische Leistung des PV-Arrays? Wie gross ist in dem Moment der Wirkungsgrad des Arrays?

d. Berechnen Sie die (gesamte) elektrische Stromstärke durch die fünf Lampen für ein paar Punkte zwischen 20 Uhr und 24 Uhr an einem Tag, und zeichnen Sie die Funktion in einem Diagramm.

e. Bestimmen Sie für die selbe Zeit die Leistung der fünf Lampen zusammen. Tragen Sie das Ergebnis auch in das selbe Diagramm ein.

f. Benutzen Sie die Werte für U_C im gegebenen Diagramm, um die Änderung der Energie der Kondensatoren an einem Tag von 20 Uhr bis 24 Uhr zu bestimmen. Warum ist dieser Wert gleich der Energie, die die Lampen erhalten haben? Wie gross ist demnach der Wirkungsgrad der ganzen Anlage über einen Tag gerechnet?

g. Ein Panel des Arrays hat eine Leerlaufspannung von etwa 10-12 V. Die Lampen werden bei einer Spannung von etwa 5-7 V betrieben. Macht es Sinn, die Panels alle parallel zu schalten? Sollte man sie nicht besser alle in Serie schalten? Oder gemischt?

4. Betrachten Sie ein Modell einer einzelnen Population in einem einzigen Gebiet. Nennen Sie die Zahl der Individuen der Population N. Benutzen Sie die Symbole Π_{NG} und Π_{NS} für Geburten- und Sterberaten und I_N für einen Migrationsstrom.

   a. Die Individuen der Population können geboren werden, sterben und wandern. Skizzieren Sie die *Bilanzbeziehung* für die Population als Diagramm eines systemdynamischen Modells (wie in BM oder Stella). Schreiben Sie dann die zugehörige Bilanzgleichung in *momentaner* Form.

   b. Aus Beobachtungen kennt man ein paar Werte der Sterberate bei gegebener Grösse der Population (siehe Tabelle). Zeichnen Sie die Daten der Sterberate als Funktion der Populationsgrösse in einem Diagramm, und generieren Sie eine sinnvolle Interpolationsfunktion (graphisch). Was für eine Funktion ist das? Schreiben Sie diese Funktion nun als Formel (mit den hier gebrauchten Symbolen).

N / Individuen	**Π_{NS} / Individuen/Tag**
5.00E+04	100
1.00E+05	200
5.00E+05	1.00E+03
2.00E+06	4.00E+03

   c. Für diese Teilaufgabe nehmen Sie an, dass *Geburtenrate und Migrationsfluss gleich null sind*. Wenn Sie das Modell der Sterberate aus b nehmen, was für ein zeitlicher Verlauf der Populationsgrösse ist dann zu erwarten? (Nehmen Sie eine Anfangspopulation von $N_0 = 2.0 \cdot 10^6$ Individuen.) Wann ist die Population auf 1/e des Anfangswertes geschrupft? Zeichnen Sie die erwartete Funktion (mit Zahlen auf den Achsen). Ergänzen Sie das systemdynamische Diagramm des Modells der Population (aus a) mit dem Modell für die Sterberate.

d. Nehmen Sie nun zu den Bedingungen aus c einen konstanten Zustrom von Individuen hinzu (*Geburtenrate ist immer noch null*). Wie gross müssen Sie diesen Zustrom machen, damit sich nach genügend langer Zeit ein stationärer Wert von $1.0 \cdot 10^6$ Individuen für die Population ergibt? Skizzieren Sie die Funktion $N(t)$ im gleichen Diagramm wie in c.

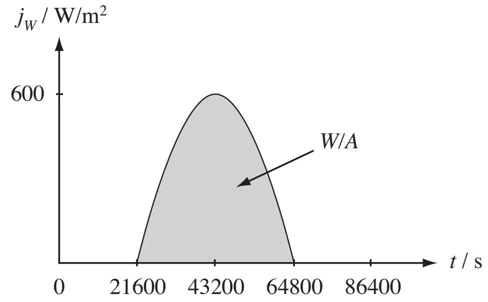
e. Setzen Sie die *Migration wieder gleich null*. Die Sterberate ist wie in b. Nehmen Sie nun eine Geburtenrate entprechend $\Pi_{NG} = aN$ (mit $a = 0.0025$ 1/Tag) dazu. Wie gross ist in jetzt die Änderungsrate der Population gerade am Anfang? Skzzieren Sie den Anfang der Funktion $N(t)$ für diesen Fall im selben Diagramm, das Sie schon in c und d kreiert haben.

Solutions

3. Solar lighting

a. The electric circuit corresponds closely to a windkessel system. The only difference is that the outflow is regulated by a valve (which is open only part of the time).

b.



The energy radiated onto 1.0 m^2 per day corrsponds to the area between jW(t) and the t-axis in the diagram:

$$\frac{W_{e,rad}}{A} = \int_{21600}^{64800} 600 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{86400}(t-21600)\right) dt =$$

$$= -600\frac{86400}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{86400}(t-21600)\right)\Bigg|_{21600}^{64800}$$

$$= -600\frac{86400}{2\pi}\left[\cos\left(\frac{2\pi\cdot 43200}{86400}\right) - \cos\left(\frac{2\pi\cdot 0}{86400}\right)\right]$$

$$= -600\frac{86400}{2\pi}\left[\cos(\pi) - \cos(0)\right] = 16.5\ \mathrm{MJ/m^2}$$

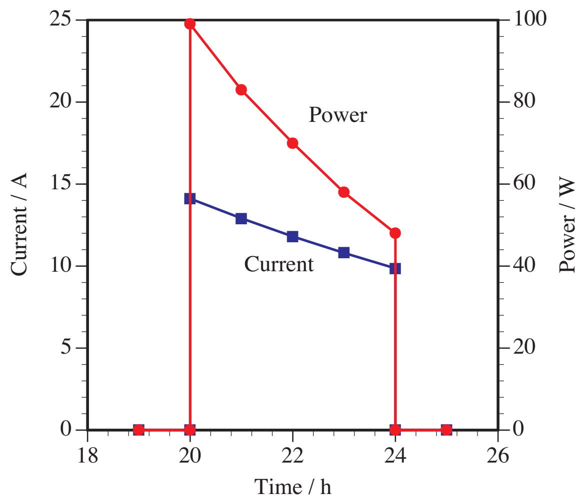
(Graphical integration by “eye” yields values around 16 MJ/m^2). Since the area of the solar cells of 30 panels is $30 \cdot 21 \cdot 15 \cdot 10^{-4}$ m^2 = 0.945 m^2, the energy radiated onto the array in one day is 15.6 MJ.

c. Voltages at noon: U_PV = 8.0 V, U_C = 6.0 V. Therefore, the current through a single panel is I_QP = (8.0 – 6.0)/10 A = 0.20 A. So, I_QPV = 30·0.20 A = 6.0 A. Therefore, P_PV = U_PV·I_QPV = 8.0·6.0 W = 48 W. Efficiency = P_PV/I_W_sun = 48 W / (0.945·600 W) = 0.085 (8.5 %).

d. and e.

Table 1:

Time / h	UC = UR / V	IQ single / A = UR/R	IQ / A = 5·IQ single	P / W = UR·IQ
20	7.05	2.82	14.1	99
21	6.44	2.58	12.9	83
22	5.89	2.36	11.8	70
23	5.38	2.15	10.8	58
24	4.92	1.97	9.84	48



f.

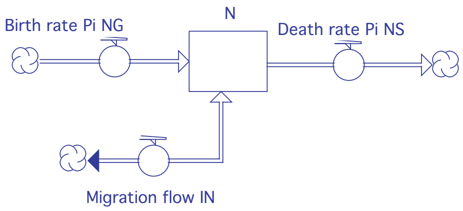
$$\Delta W_C = \frac{1}{2}C\left(U_{C,2}^2 - U_{C,2}^2\right) = 0.5 \cdot 80000 \cdot (24.2 - 49.7)\,\mathrm{J} = -1.0 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$$

This is the change of energy of the capacitor from 20 h to 24 h. During this time, only the lamps are hooked up to the capacitor, and they are connected directly. So all the energy emitted by the capacitor goes to the lamps.
Total efficiency = Energy lamps / Energy of radiation = $1.0 \cdot 10^6$ J / $15.6 \cdot 10^6$ J = 0.065 (6.5 %).

g. If the lamps have to be operated at 5-7 V, the voltage of the capacitor should be in this range as well (after charging during the day). To charge the capacitors to such voltages, PV voltages of up to 10-12 V of a single panel should be enough. Therefore, the panels do not have do be connected in series. All of them can be connected in parallel.

4. Population model

a.

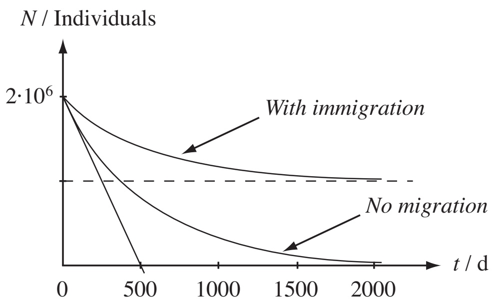


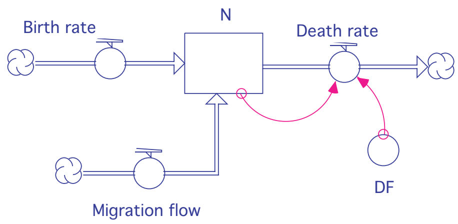
$$\frac{dN}{dt} = \Pi_{NG} - \Pi_{NS} + I_N$$

b. Clearly, Pi_NS and N are proportional (linear relation going through (0,0)):

$$\Pi_{NS} = 2.0 \cdot 10^{-3} N$$

c. Exponential decay. Time constant τ = N0/Pi_NS(0) = $2.0 \cdot 10^6$ / $4.0 \cdot 10^3$ days = 500 days.





d. Steady-state size of population: $1.0 \cdot 10^6$ individuals:

$$\frac{dN}{dt} = -\Pi_{NS} + I_N$$

$$steady-state: \quad \frac{dN}{dt} = 0$$

$$0 = -\Pi_{NS} + I_N$$

$$I_N = \Pi_{NS} = 2.0 \cdot 10^{-3} N = 2.0 \cdot 10^{-3} \cdot 1.0 \cdot 10^{6} \text{ Individuals/day}$$

$$I_N = 2000 \text{ Individuals/day}$$

e. Law of balance:

$$\frac{dN}{dt} = \Pi_{NG} - \Pi_{NS}$$

Insert laws for birthrate and deathrate:

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= aN - bN \\
\left.\frac{dN}{dt}\right|_{t=0} &= \left(0.0025\,\frac{1}{\text{day}} - 0.0020\,\frac{1}{\text{day}}\right)\cdot 2.0\cdot 10^{6}\ \text{Individuals} \\
&= 0.5\cdot 10^{-3}\cdot 2.0\cdot 10^{6}\ \frac{\text{Individuals}}{\text{day}} \\
&= 1.0\cdot 10^{3}\ \frac{\text{Individuals}}{\text{day}}
\end{aligned}$$

1. Die Reaktion $H_2 + I_2 \rightarrow 2HI$ ist 2. Ordnung und wird im industriellen Massstab in der Gasphase durchgeführt. Bei einer Temperatur von 400 °C beträgt die Ratenkonstante der Reaktion k rund $2.4 \cdot 10^{-2}$ $L \cdot mol^{-1} \cdot s^{-1}$. Betrachten Sie einen Reaktor mit einem Volumen von 100 L, der keine Stoffe mit der Umgebung austauscht und am Anfang 100 Mol H_2, 50 Mol I_2 und kein Produkt enthält. Sie können davon ausgehen, dass es keine Rückreaktion gibt und dass die Konzentrationen aller Stoffe im Reaktor räumlich homogen sind.

a) Wie gross sind die Anfangskonzentrationen von H_2 und I_2 in $g \cdot L^{-1}$? Die Molmasse von H beträgt 1.09 $g \cdot mol^{-1}$, jene von I 126.9 $g \cdot mol^{-1}$.

b) Geben Sie je eine Gleichung für die *absoluten* Veränderungsraten der drei Stoffmengen an.

c) Wie gross ist unmittelbar nach dem Start der Reaktion die Veränderungsrate der HI-Menge im gesamten Reaktor? Geben Sie das Ergebnis in Zahlen an.

d) Skizzieren Sie die zeitlichen Verläufe aller drei Konzentrationen vom Start der Reaktion bis zum Gleichgewicht. Die Startkonzentrationen und die Konzentrationen am Schluss der Reaktion sollen quantitativ sichtbar sein. Erläutern Sie Ihre Skizze.

5 Punkte

2. Ein System besteht aus drei Speichern A, B und C, welche wie in Abb 1 dargestellt miteinander in Verbindung stehen. Über die Verbindungen fliesst eine mengenartige Grösse m. Der Fluss I_{ij} zwischen einem Ausgangsspeicher i und einem Zielspeicher j hängt linear von der vorhandenen Menge im Ausgangsspeicher m_i und einem Koeffizienten k_{ij} ab: $I_{ij} = k_{ij} m_i$.

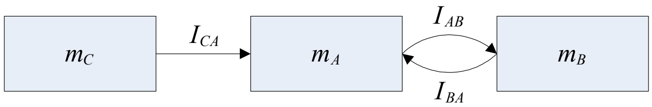


Abb. 1: Konfiguration des Systems

a) Geben Sie je eine Gleichung für die Änderungsraten von m_A, m_B und m_C an.

b) Skizzieren Sie das Flowchart eines Madonna-Modells des Systems. Alle Speicher, Flüsse und Systemparameter müssen sichtbar sein. Erläutern Sie Ihre Skizze.

c) Schreiben Sie die drei Gleichungen aus a) in der Form $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{A}\mathbf{m}$ ($\mathbf{m}$ ist ein Spaltenvektor mit den Elementen m_A, m_B und m_C).

d) Das System aus c) besitzt unendlich viele Gleichgewichte. Geben Sie formal die Gleichgewichtsmengen in den einzelnen Speichern an, wenn Speicher A genau eine Einheit von m enthält.

5 Punkte

Lösungen

1. a)

$$1\text{ Mol } H_2 \;\hat{=}\; 2\text{ g}$$
$$1\text{ Mol } I_2 \;\hat{=}\; 253.8\text{ g}$$

$$c_{H_2}(t=0) = \frac{100\text{ Mol } H_2}{100\text{ L}} = \frac{200\text{ g } H_2}{100\text{ L}} = 2\text{ g/L}$$
$$c_{I_2}(t=0) = \frac{50\text{ Mol } I_2}{100\text{ L}} = \frac{12690\text{ g } I_2}{100\text{ L}} = 126.9\text{ g/L}$$

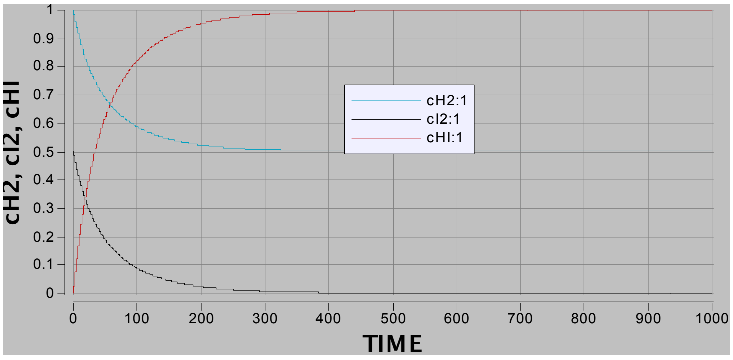
b)

$$\dot{n}_{H_2} = -V\cdot k\cdot c_{H_2}\cdot c_{I_2}$$
$$\dot{n}_{I_2} = -V\cdot k\cdot c_{H_2}\cdot c_{I_2}$$
$$\dot{n}_{HI} = 2\cdot V\cdot k\cdot c_{H_2}\cdot c_{I_2}$$

c)

$$\begin{aligned}\dot{n}_{HI}(t=0) &= 2\cdot V\cdot k\cdot c_{H_2}(t=0)\cdot c_{I_2}(t=0)\\ &= 2\cdot 100\text{ L}\cdot 2.4\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{L}}{\text{mol}\cdot\text{s}}\cdot 1\,\frac{\text{mol}}{\text{L}}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\text{mol}}{\text{L}}\\ &= 2.4\,\frac{\text{mol}}{\text{s}}\end{aligned}$$

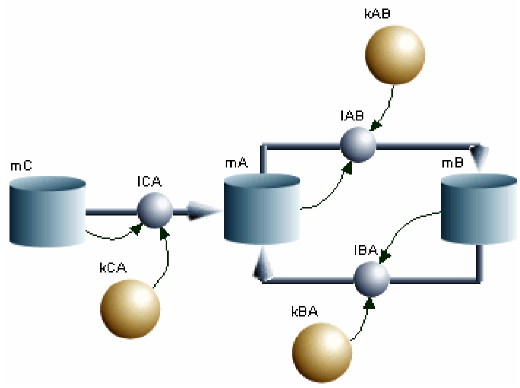
d)



2. a)

$$\begin{aligned}\dot{m}_A &= -k_{AB}m_A + k_{BA}m_B + k_{CA}m_C \\ \dot{m}_B &= k_{AB}m_A - k_{BA}m_B \\ \dot{m}_C &= -k_{CA}m_C\end{aligned}$$

b)



c)

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_A \\ m_B \\ m_C \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -k_{AB} & k_{BA} & k_{CA} \\ k_{AB} & -k_{BA} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{CA} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{A}\mathbf{m}$$

d)

$$\mathbf{m}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_{AB}}{k_{BA}} \\ 0 \end{pmatrix}$$