Physik und Systemwissenschaft

End of Semester Exam, January 2010

Erstes Semester Wirtschaftsingenieurwesen, WI09

Allgemeine Bemerkungen

Erlaubte Hilfsmittel: Bücher und persönlich verfasste Zusammenfassung. Rechen- und Schreibzeugs.

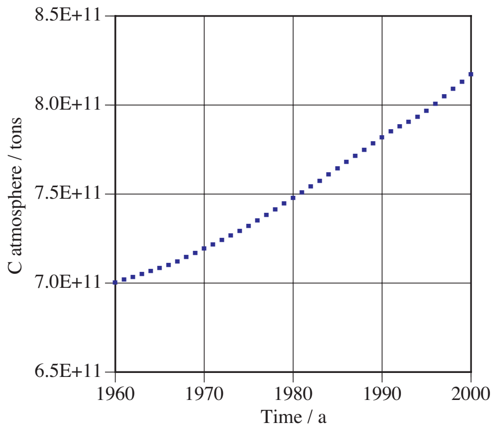
Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt. Die Blätter für Aufgabe 1 muss separat für Herrn Hosang abgegeben werden!

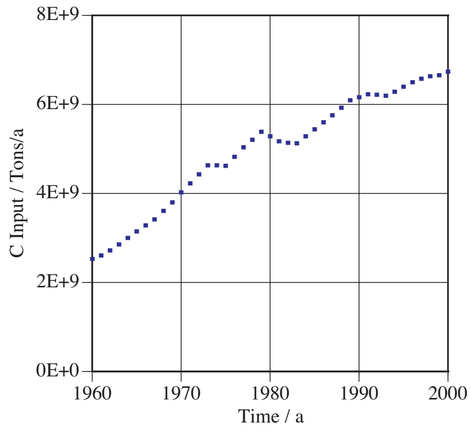
Schreiben Sie jedes Blatt an (Name, Datum, Prüfung, Nummer der Aufgabe).

Geben Sie die Aufgabenblätter mit Ihren Lösungen ab. Schreiben Sie die Aufgabenblätter mit Ihrem Namen an.

Punkteverteilung:
Ausgabe 1: 12
Ausgabe 2: 11
Ausgabe 3: 12

1. In den beiden folgenden Diagrammen sind Daten der Masse von Kohlenstoff (C) in der Atmosphäre (in Tonnen) und des Inputs von Kohlenstoff (in Tonnen pro Jahr) von 1960 bis 2000 angegeben.





a. Bestimmen Sie eine lineare Interpolationsfunktion für den Input von Kohlenstoff in der Form

$$I_{m,in}(t) = D(t - 1960) + E$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten D und E (Einheit der Masse: Tonne, Einheit der Zeit: Jahr). [2 P.]

b. Wie gross ist die Änderungsrate der Masse von Kohlenstoff in der Atmosphäre zu den Zeitpunkten t = 1960 und t = 1980? [1.5 P.]

c. Machen Sie ein Modell der Erde, in dem nur zwei Kohlenstoffreservoire vorkommen: Atmosphäre (A) und Ozean (O). Das von Menschen freigesetze CO_2 geht in die Atmosphäre, und Atmosphäre und Ozean stehen in Wechselwirkung. Zeichnen Sie das Diagramm eines dynamischen Modells (flow chart), das zu diesen Angaben passt. [1.5 P.]

Angaben zum Massenstrom von Kohlenstoff zwischen Atmosphäre und Ozean: Der Netto-Massenstrom I_m kann in der Form

$$I_m = I_{m,AO} - I_{m,OA} = \alpha_{AO} m_{C,A} - \alpha_{OA} m_{C,O} \quad (1)$$

oder

$$I_m = \alpha_{AO}\left(m_{C,A} - \mathcal{K} m_{C,O}\right) \quad (2)$$

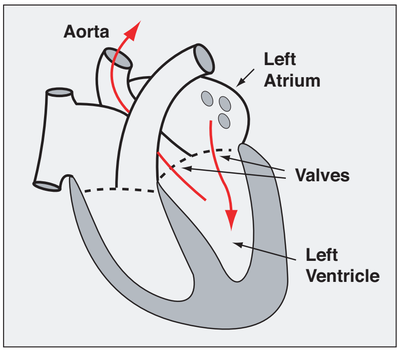
angegeben werden. Gleichung (2) hat die bei Reaktionen bekannte Form, wobei $\mathcal{K}$ die Gleichgewichtskonstante ist.

d. Leiten Sie den Zusammenhang zwischen $\mathcal{K}$ und den Ratenkonstanten α_{AO} und α_{OA} her. [2 P.]

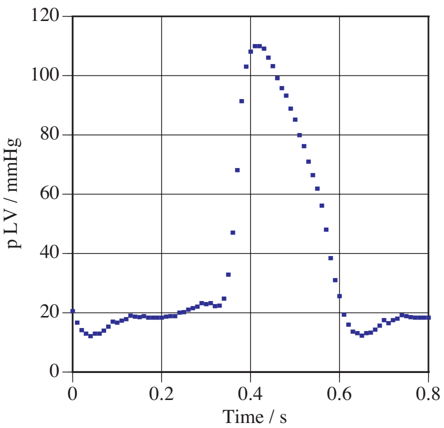
e. Bestimmen Sie den Massenstrom von Kohlenstoff zwischen Atmosphäre und Ozean für t = 1960. [2 P.]

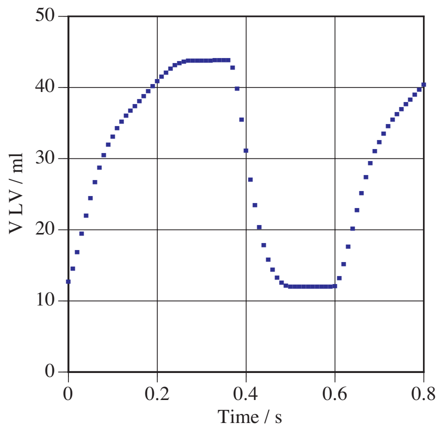
f. Wenn Sie annehmen, dass im Gleichgewicht die Ozeane 60 mal mehr C speichern als die Atmosphäre, wie gross ist dann die Gleichgewichtskonstante $\mathcal{K}$ in Gleichung (2) in Aufgabe c? [1.5 P.]

g. Bestimmen Sie den Wert der Ratenkonstanten α_{AO}. und α_{OA}. Zum Zeitpunkt t = 1960 enthalte der Ozean $4.0 \cdot 10^{13}$ Tonnen Kohlenstoff. [1.5 P.]



2. In den beiden folgenden Diagrammen sind Daten des Blutdrucks (in mmHg) in der linken Herzkammer (left ventricle, LV) und des Volumens des Blutes (in ml) in dieser Kammer als Funktionen der Zeit gegeben. Die Zeitspanne beträgt etwas mehr als die Dauer eines Herzschlags.





a. Benutzen Sie die Daten in den beiden Diagrammen um ein neues Diagramm zu erstellen: Druck in der linken Herzkammer als Funktion des Blutvolumens. (Diese Darstellung nennt man ein Phasendiagramm.) [2.5 P.]

b. Das Phasendiagramm zeigt vier verschiedene Phasen (Prozesse). Benutzen Sie das Diagramm um zu erklären, wie die linke Herzkammer als Pumpe funktioniert. [2.5 P.]

c. Bestimmen Sie die Menge Blut, die pro Zyklus durch die Linke Herzkammer transportiert wird. [1 P.]

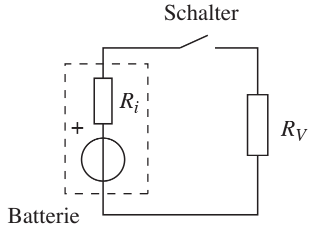
d. Man kann das Phasendiagramm benutzen, um die Energie zu bestimmen, die die Herzmuskeln pro Herzschlag an das Blut in der linken Herzkammer geben, und zwar ist der Wert gleich der von der Kurve im pV Diagramm eingeschlossenen Fläche. (1) Bestimmen Sie diesen Wert in Standardeinheiten für die Energie. (2) Erklären Sie, warum man das pV Diagramm auf diese Weise gebrauchen kann. [2.5 P.]

Daten: Die Dichte von Quecksilber beträgt 13600 kg/m^3.

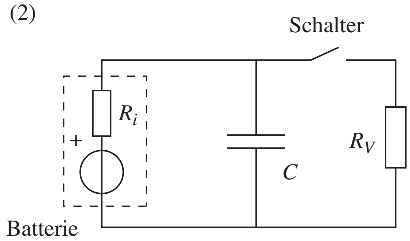
e. Wenn Sie direkt von den Zeitfunktionen $p_{LV}(t)$ und V_{LV}(t) in den beiden gegebenen Diagrammen ausgehen, und wenn Sie kein Phasendiagramm zur Verfügung haben, wie müssten Sie dann die vom Herz pro Herzschlag gelieferte Energie bestimmen? (Sie müssen das Verfahren nicht durchführen, nur genau erklären.) [2.5 P.]

3. Wenn man kleine Motoren, Lämpchen oder elektrische Heizer nicht konstant sondern intermittierend (an/aus) mit einer Batterie betreibt, so kann man die Funktionsdauer einer Batterie durch Hinzuschalten eines Kondensators (mit relativ grosser Kapazität) verlängern. Sie sollen im Folgenden zwei Schaltungen untersuchen: (1) ohmsches Widerstandselement (Heizung) direkt an einer Batterie und (2) ohmscher Widerstand an Batterie mit parallel dazu geschaltetem Kondensator.

(1)



(2)



Angaben:

Batterie: Modellieren Sie die Batterie als ideale Spannungsquelle (mit einer Spannung von 4.5 V) und einem Innenwiderstand von 1.0 Ω.

Kondensator: Kapazität 1.0 F.

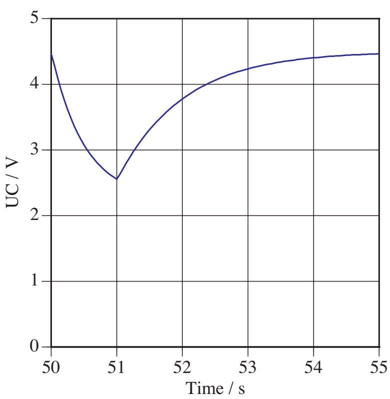
Verbraucher: Der Verbraucher ist ein ohmsches Widerstandselement mit einem Widerstand von 1.0 Ω.

Schalter: Der Schalter ist immer für die ersten 1.0 s einer 5.0 s dauernden Periode geschlossen, sonst ist er offen.

a. Bestimmen Sie die elektrische Stromstärke für Schaltung 1 für die Phasen, wenn der Schalter geschlossen ist. [2 P.]

b. Wie gross sind die Leistungen der idealen Spannungsquelle und des Verbrauchers während der An-Phasen bei Schaltung 1? Welcher Bruchteil der Energie, der von der Spannungsquelle zur Verfügung gestellt wird, geht an den Verbraucher? [2 P.]

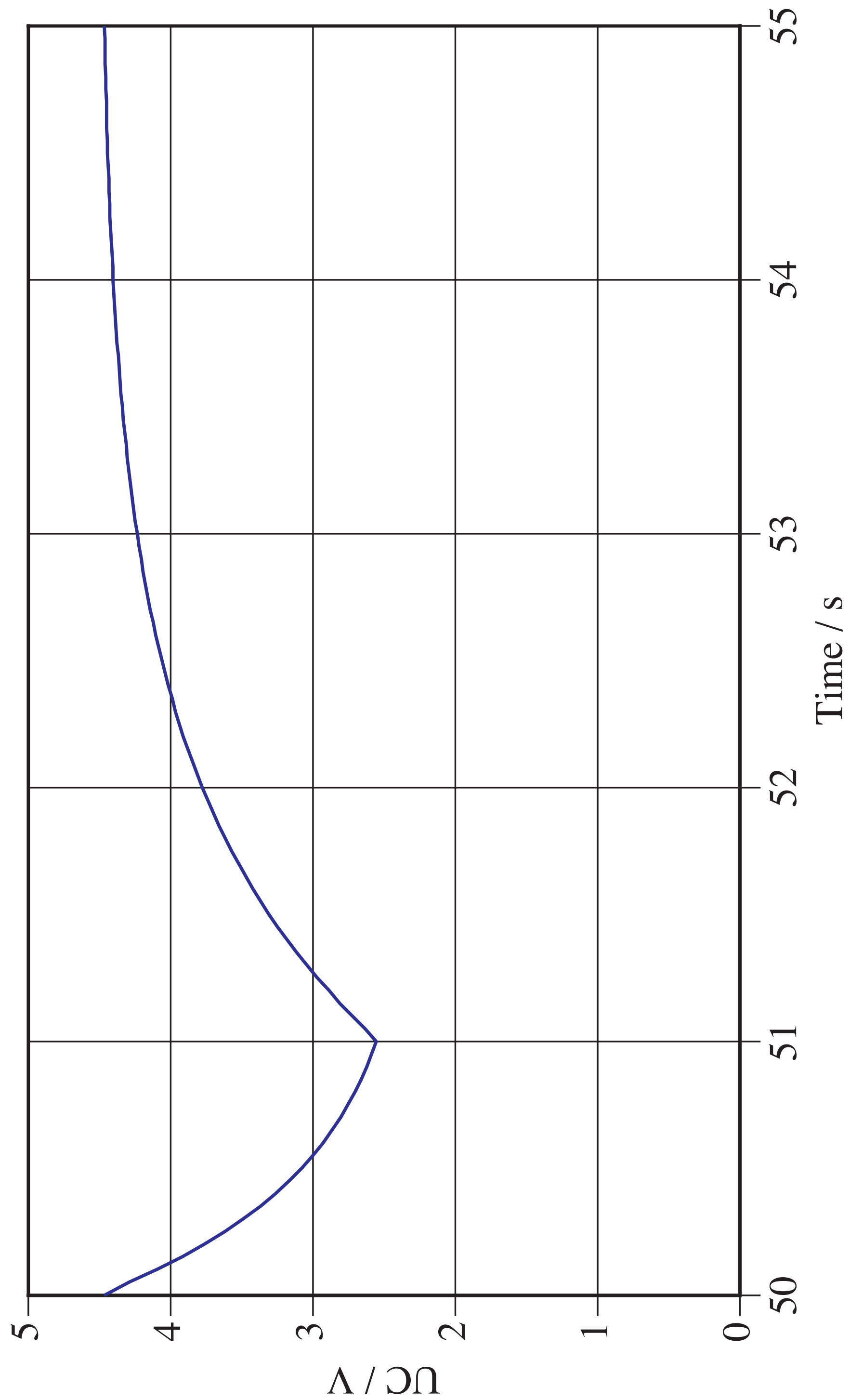
c. Zeichnen Sie für Schaltung 2 das Diagramm (Flow chart) eines systemdynamischen Modells. Formulieren Sie darauf alle Gleichungen dieses Modells. [2 P.]



d. Für eine Periode von 5.0 Sekunden ist die Spannung über dem Kondensator in Schaltung 2 gegeben (siehe Diagramm, Vergrösserung siehe hinten). Bestimmen Sie so genau wie möglich die Stromstärken in den beiden Schlaufen und zeichnen Sie sie in das grosse Diagramm ein (beschriften Sie dazu die rechte vertikale Achse). [2 P.]

e. Bestimmen Sie die Energie, die während der 5.0 s von der idealen Spannungsquelle abgegeben wird und die Energie, die der Verbraucher erhält (Schaltung 2). Bilden Sie dann das Verhältnis und vergleichen sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe b. [2 P.]

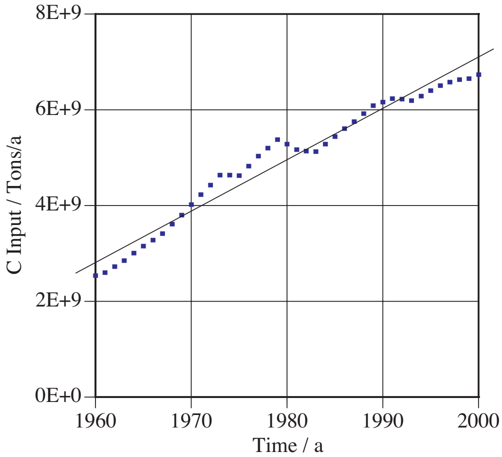
f. Warum ist die zweite Schaltung für die Batterie besser? [2 P.]


UC / V
0
1
2
3
4
5
Time / s
50
51
52
53
54
55

Solutions

1. Carbon in atmosphere and oceans

a.

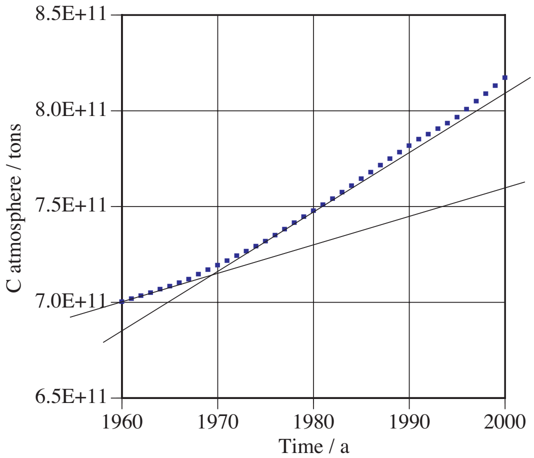


$$I_{m,in}(t) = D(t - 1960) + E$$

$D = 1.05 \cdot 10^8$ tons/a^2

$E = 2.8 \cdot 10^9$ tons/a

b.

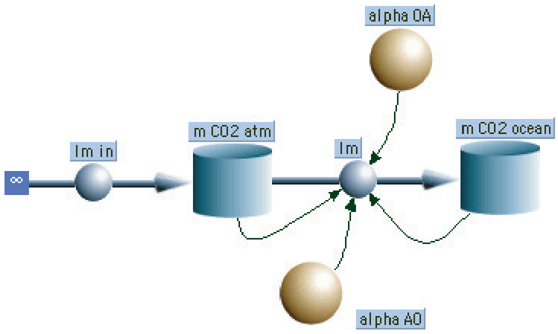


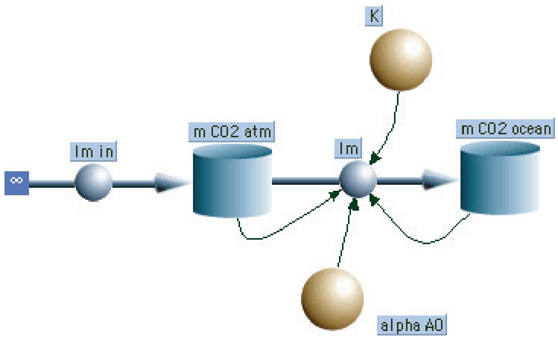
Slope of tangents:

1960: $dm/dt = 1.5 \cdot 10^9$ tons/a

1980: $dm/dt = 3.3 \cdot 10^9$ tons/a

c. Depending upon which form we use for the current of carbon between the reservoirs, one or the other of the model diagrams is appropriate:





d. Equations (1) and (2) have to be compared:

$$\alpha_{AO}\left(m_{C,A}-\mathcal{K}m_{C,O}\right)=\alpha_{AO}m_{C,A}-\alpha_{OA}m_{C,O}$$
$$\alpha_{AO}m_{C,A}-\alpha_{AO}\mathcal{K}m_{C,O}=\alpha_{AO}m_{C,A}-\alpha_{OA}m_{C,O}$$
$$\alpha_{AO}\mathcal{K}=\alpha_{OA}$$
$$\mathcal{K}=\frac{\alpha_{OA}}{\alpha_{AO}}$$

e. Law of balance of carbon for the atmosphere:

$$\dot{m}_A=I_{m,in}-I_m$$
$$I_m=I_{m,in}-\dot{m}_A=2.8\cdot 10^9\,\frac{\text{tons}}{\text{a}}-1.5\cdot 10^9\,\frac{\text{tons}}{\text{a}}=1.3\cdot 10^9\,\frac{\text{tons}}{\text{a}}$$

f. Equilibrium condition:

$$I_m=0\quad\Rightarrow\quad\alpha_{AO}\left(m_{C,A}-\mathcal{K}m_{C,O}\right)=0$$
$$\Rightarrow\quad\mathcal{K}=\frac{m_{C,A}}{m_{C,O}}=\frac{1}{60}$$

g. The current of carbon at t = 1960 is known:

$$I_m(1960) = \alpha_{AO}\left(m_{C,A}(1960) - \mathcal{K} m_{C,O}(1960)\right)$$

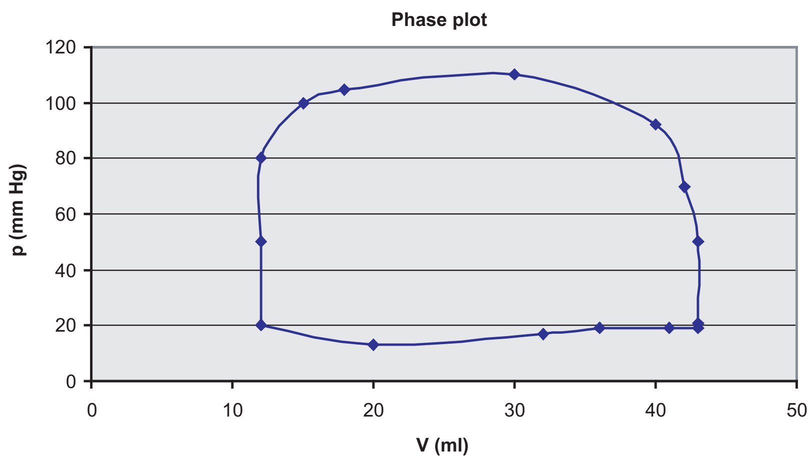
$$\alpha_{AO} = \frac{I_m(1960)}{\left(m_{C,A}(1960) - \mathcal{K} m_{C,O}(1960)\right)} = \frac{1.3}{7.0 \cdot 10^{11} - \frac{1}{60} 4.0 \cdot 10^{13}} \frac{1}{\text{a}} = 3.9 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{a}}$$

Now we can determine the missing parameter:

$$\mathcal{K} = \frac{\alpha_{OA}}{\alpha_{AO}} = \frac{1}{60} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{OA} = \frac{\alpha_{AO}}{60} = 6.5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{a}}$$

2. Heart as a pump

a. Phase plot: Plot pressure versus volume:



b. Left ventricle as a pump:

1. Phase („unten“): V nimmt zu, p ungefähr konstant auf tiefem Wert, d.h. die linke Herzkammer füllt sich (Füllungsphase)

2. Phase („rechts“): p nimmt zu, V ungefähr konstant auf hohem Wert, d.h. die Kammer wird angespannt, der Druck steigt, aber das Blutvolumen ist noch konstant, weil die Klappen geschlossen sind (Anspannungsphase)

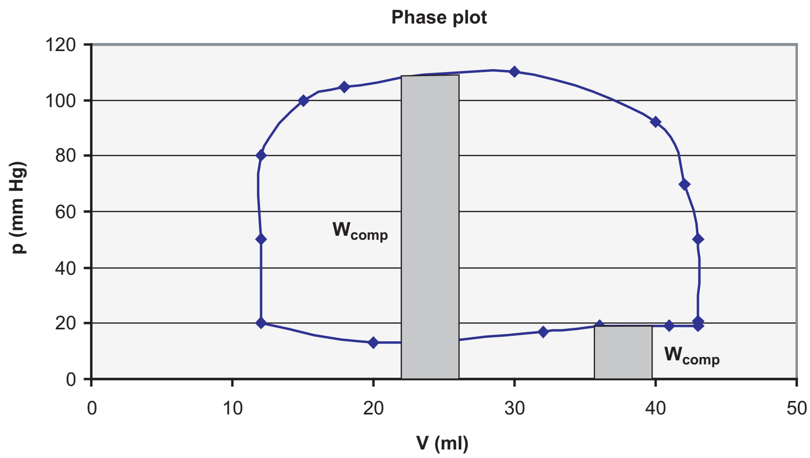
3. Phase („oben“): V nimmt ab, p ungefähr konstant auf hohem Wert, d.h. der Druck ist so gross geworden, dass die Aortaklappe sich öffnet und das Blut herausgepresst wird (Austreibungsphase)

4. Phase („links“): p nimmt ab, V ungefähr konstant auf tiefem Wert, d.h. der Herzmuskel erschlafft, die Kammer expandiert, der Druck nimmt ab (Erschlaffungsphase)

c. Die Menge Blut ergibt sich aus der Differenz des Maximums und Minimums, ca. 30 ml pro Herzschlag. (Kann man aus den Zeitfunktionen oder aus dem Phasendiagramm ablesen.)

d. (1) W_comp = pV = (Annäherung Rechteck) 80 mm Hg * 30 ml = 1.35e+04 kg/m3 * 9.81 N/kg * 8e-02 m * 3e-05 m3 = 0.32 J = 0.32 J.

(2) Die Energie, die der Herzmuskel ans Blut abgibt, muss gleich der Differenz der beim Zu- und Abfliessen des Blutes zu- und abgeführten Energie sein. Die letztere wird aus dem (zu- oder Abgeführten) Volumen und dem zugehörigen Druck berechnet: W_comp = W_e,netto = p*V_e,netto = p*ΔV. Dieser Wert entspricht einem Flächenstück im Phasendiagramm:



Gesamthaft (mit dem Vorzeichen berücksichtigt) ergibt sich die Fläche in der geschlossenen Kurve im Phasendiagramm.

Formal: Da dW=-p*dV kann man bei bekanntem p(V) direkt das Linienintegral im Phasendiagramm bilden, um die Gesamtarbeit (bzw. Energie) auszurechnen.

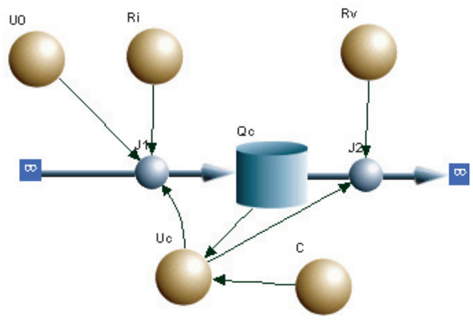
e. Man muss den Netto-Energiestrom berechnen: I_W,netto = p*I_V,netto = p*dV/dt. Also muss man zuerst die Änderungsrate des Volumens als Funktion der Zeit bestimmen (graphisch), diese mit dem (variablen) Druck multiplizieren, und diese neue Funktion über die Zeit Integrieren, d.h. Aufsummieren der kleinen Beiträge ΔW=-p(t)*dV/dt*Δt.

3. Battery and capacitor

a. R_tot=2 Ω, also I_Q = 2.25 A.

b. P_0= U_0*I_Q = 4.5*2.25 W= 10.125 W, P_v= 1*2.25^2 W = 5.0625 W, d.h. 50 % der gesamten Energie gehen an den Verbraucher.

c.



d/dt (Qc) = + J1 - J2 ; INIT Qc = 4.5

J1 = (U0-Uc)/Ri

J2 = if mod(time, 5) <= 1 then Uc/Rv else 0

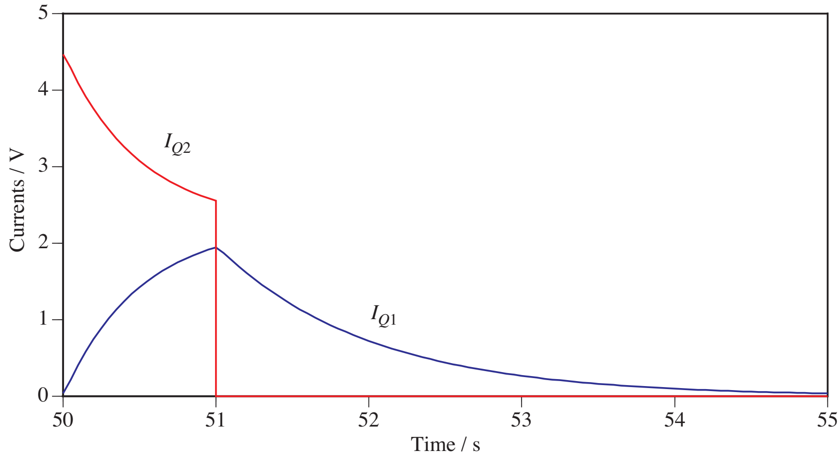
U0 = 4.5

Ri = 1, C = 1

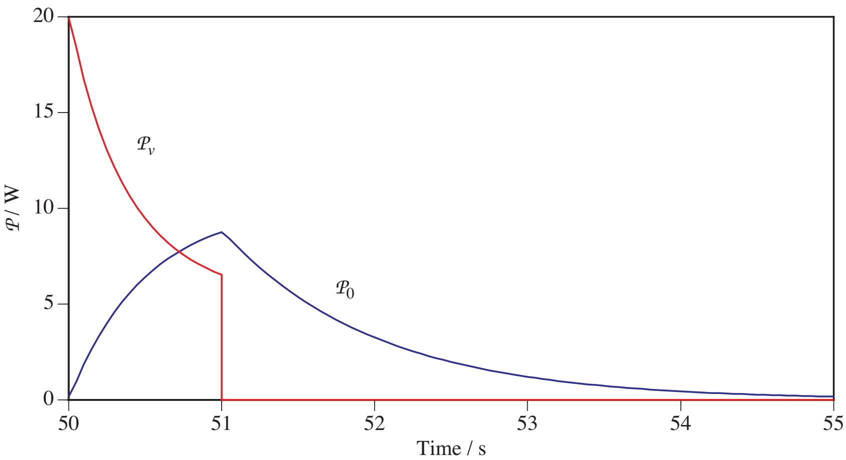
Uc = Qc/C

Rv = 1

d. IQ1 = (U0 - UC) / Ri, IQ2 = UC/R



e. Power of ideal source: P0 = U0*IQ1, Power of load: Pv = UC*IQ2:



Von (idealer) Quelle zur abgegebene Energie: Integral von P0 (Fläche unter entsprechender Kurve) = 14.3 J. Dem Verbraucher zur Verfügung gestelle Energie: Integral von Pv (Fläche unter entsprechender Kurve) = 11.3 J, etwa 75%.

f. Die Verluste entstehen in der Batterie (Innenwiderstand). In der zweiten Schaltung wird der Verbraucher vom (geladenen) Kondensator bei starkem Strom gespeist (kein weiterer Verlust), während das Aufladen des Kondensators bei im Mittel schwächerem Strom geschieht (relativ weniger Verluste als bei Schaltung 1).

Wenn es darum geht, dem Verbaucher in beiden Fällen gleich viel Energie zu geben, dann kann man bei Schaltung 2 den Schalter weniger lang geschlossen halten als bei Schaltung 1: also hält die Batterie länger.