

Physik und Systemwissenschaft

Test, Mai 2010

Zweites Semester WI09

Erlaubte Hilfsmittel: Bücher und persönlich verfasste Zusammenfassung. Rechen- und Schreibzeugs.

Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Personalpolitik

Für folgende Situation soll ein (formales) Modell erstellt und untersucht werden. Eine grosse Firma hat N Angestellte. Neue Angestellte werden traditionell mit konstanter Rate A angestellt. Gleichzeitig verlassen Personen die Firma mit einer Rate K (Kündigungsrate), die proportional zur Zahl der Angestellten ist. Der Proportionalitätsfaktor sei f_K .

- Skizzieren Sie ein Modelldiagramm. Stellen Sie die Differentialgleichung für die Zahl der Angestellten (N) auf, und formulieren Sie eine Anfangsbedingung. [3 P.]
- Wenn die Zahl der Angestellten anfänglich 20000 beträgt, $f_K = 0.04 \text{ M}^{-1}$ ($\text{M} = \text{Monat}$) ist, und die Anstellungsrate $A = 600 \text{ M}^{-1}$ ist, wie sieht dann $N(t)$ aus? (Skizzieren Sie die Lösung mit Zahlen auf den Achsen.) [2 P.]

Die Firmenleitung setzt die Anstellungsrate auf neue Art fest. (An den Kündigungen ändert sich aber nichts.) Ausgehend von einer gewünschten Zahl von Mitarbeitenden (G) ändert sie die Anstellungsrate folgendermassen. Die Änderungsrate von A soll proportional zur Differenz zwischen gewünschter Zahl und tatsächlicher Zahl der Mitarbeitenden gemacht werden. Der Proportionalitätsfaktor für diesen Vorgang sei f_A .

- Formulieren Sie nun alle Gleichungen des Modells, und formen Sie sie so um, dass nur noch zwei Differentialgleichungen mit ihren Anfangsbedingungen übrig bleiben. [3 P.]
- Formen Sie die Gleichungen zu einer Differentialgleichung 2. Ordnung um. Zeigen Sie, dass das Resultat

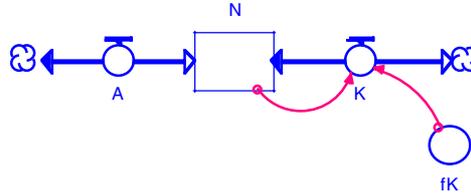
$$\frac{d^2N}{dt^2} + f_K \frac{dN}{dt} + f_A N = f_A G$$

ist. (Das ist die Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung, analog zu Elektrizität und Hydraulik.) [2 P.]

- Welche Massnahme führt dazu, dass die Periode der Schwankungen der Mitarbeiterzahl länger wird? [1 P.]
- Welcher Aspekt des Modells führt zur Dämpfung? Was für eine Massnahme verstärkt die Dämpfung? [1 P.]

Solutions

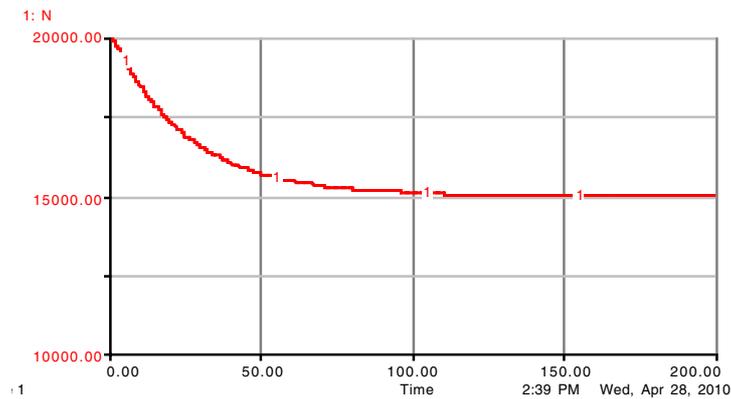
a. Model diagram:



DE of first process. Law of balance for N, law for L:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= A - K, \quad N(0) = N_0 \\ K &= f_K N \\ \Rightarrow \frac{dN}{dt} &= A - f_K N, \quad N(0) = N_0 \end{aligned}$$

b. Solution of DE for $f_K = 0.04$, $A = 600$, $N_0 = 20000$ (form from initial rate of change and steady state value):



c. Equations of model:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= A - K, \quad N(0) = N_0 \\ K &= f_K N \\ \frac{dA}{dt} &= f_A D, \quad A(0) = A_0 \\ D &= G - N \end{aligned}$$

Transformation:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= A - f_K N, \quad N(0) = N_0 \\ \frac{dA}{dt} &= f_A (G - N), \quad A(0) = A_0 \end{aligned}$$

d. Take the derivative of the first DE and insert:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{dN}{dt} &= \frac{d}{dt} (A - f_K N) \\ \frac{d^2 N}{dt^2} &= \frac{dA}{dt} - f_K \frac{dN}{dt} = f_A (G - N) - f_K \frac{dN}{dt} \\ \frac{d^2 N}{dt^2} + f_K \frac{dN}{dt} + f_A N &= f_A G\end{aligned}$$

e. Since

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{f_A}}$$

the period is made longer if we decrease f_A (i.e., if we react *more slowly*—or less strongly—to the difference of G and N).

f. The model of employees leaving the company leads to damping. f_K is a kind of damping factor. If employees leave the company faster (greater f_K), the damping effect is stronger. (If the rate of employees quitting their jobs were constant, the oscillation would be undamped.)