Natur, Technik, Systeme

Test, Mai 2011

Zweites Semester WI10

Erlaubte Hilfsmittel: Bücher und persönlich verfasste Zusammenfassung. Rechen- und Schreibzeugs.

Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Dauer des Tests: 60 Minuten.

Aufgaben stellen und lösen

Betrachten Sie folgenden Prozess. Eine Professorin stellt den Studierenden laufend Aufgaben (mit einer Rate I_A, Einheit: Aufgaben pro Woche). Die Studierenden lösen diese Aufgaben mit einer Rate I_L. Wenn die Raten der Aufgabenstellung und des Lösens nicht übereinstimmen, gibt es einen Rückstand (R, Einheit: Aufgaben) ungelöster Aufgaben.

a. Die Raten der Aufgabenstellung und des Lösens seien konstant ($I_A = I_{A0}, I_L = I_{L0}$); am Anfang ist der Rückstand gleich Null. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für dieses Beispiel und leiten Sie den Rückstand als Funktion der Zeit her. Skizzieren Sie einen Verlauf für den Fall dass $I_{A0} > I_{L0}$. [2 P]

b. Die Professorin möchte, dass der Rückstand nie über einen akzeptierten Wert R^* = const. steigt. Deshalb stellt sie Aufgaben nach folgendem Modell. Die Rate der Aufgabenstellung wird proportional zur Differenz zwischen R^* und R gemacht. Der Proportionalitätsfaktor ist der Kehrwert einer Zeitkonstanten τ, mit der die Professorin die Rate der Aufgabenstellung anpasst. Die Rate, mit der die Aufgaben gelöst werden, ist immer noch konstant gleich I_{L0}. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für dieses Beispiel und leiten Sie den Rückstand als Funktion der Zeit her. Skizzieren Sie einen Verlauf mit Anfangswert Null. [4 P]

c. Die Professorin reagiert nicht direkt sondern mit gewisser Trägheit (Induktivität L) auf die Diskrepanz zwischen akzeptiertem und tatsächlichem Rückstand. Die Differenz zwischen R^* und R ist also für die Änderungsrate von I_A verantwortlich. Die Rate, mit der die Aufgaben gelöst werden, ist weiterhin konstant ($I_L = I_{L0}$). Am Anfang ist der Rückstand gleich Null und die Rate, mit der die Professorin Aufgaben stellt, ist gleich I_{A0}. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für $R(t)$. [3 P]

d. Wie gross ist die Schwingungsperiode des Modells in c? [1 P]

e. Welche Aussagen über das Anfangswertproblem in Aufgabe c stimmen? [1 P]

eindimensional		mehrdimensional	
linear		nicht-linear	
mit konstanten Koeffizienten		mit variablen Koeffizienten	
homogen		nicht homogen	

f. [Zusatzaufgabe] Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Studierenden die Aufgaben nach folgendem Modell lösen. Die Rate, mit der Aufgaben gelöst werden, ist proportional zum Rückstand (mit Proportionalitätsfaktor β). Formulieren Sie das Anfangswertproblem für $R(t)$. [3 P]

g. [Zusatzaufgabe] Leiten Sie für Aufgabe c den Rückstand als Funktion der Zeit her. Wie gross ist die Schwingungsperiode? Welche Bedeutung haben die Parameter L, I_L, R^* und I_{A0}? Hinweis: Machen Sie einen Ansatz (Sinusfunktion mit vertikaler Verschiebung, Amplitude, Frequenz und Phase); dann bestimmen Sie die unbekannten Parameter der Funktion durch die Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen. [4 P]

Solutions

Assigning and solving problems

a.

$$\begin{aligned}
&\frac{dR}{dt} = I_A - I_L \quad , \quad R(0) = 0 \\
&I_A = I_{A0} \\
&I_L = I_{L0} \\
&\Rightarrow \quad \frac{dR}{dt} = I_{A0} - I_{L0} \quad , \quad R(0) = 0
\end{aligned}$$

Solution of the differential equation is a linear function starting at R = 0:

$$R(t) = \left(I_{A0} - I_{L0}\right)t$$

b.

$$\begin{aligned}
&\frac{dR}{dt} = I_A - I_L \quad , \quad R(0) = 0 \\
&I_A = \frac{1}{\tau}\left(R^* - R\right) \\
&I_L = I_{L0} \\
&\Rightarrow \quad \frac{dR}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(R^* - R\right) - I_{L0} \quad , \quad R(0) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{1}{\tau}R + \frac{1}{\tau}R^* - I_{L0} \quad , \quad R(0) = 0
\end{aligned}$$

The solution of this single differential equation must be an exponential funtion that starts at zero and asymptotically approaches

$$0 = -\frac{1}{\tau}R(\infty) + \frac{1}{\tau}R^* - I_{L0} \quad \Rightarrow \quad R(\infty) = R^* - \tau I_{L0}$$

The function that satisfies these conditions is

$$R(t) = \left(R^* - \tau I_{L0}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

c.

$$\begin{aligned}
&\frac{dR}{dt} = I_A - I_L \quad , \quad R(0) = 0 \\
&\frac{dI_A}{dt} = \frac{1}{L}\left(R^* - R\right) \quad , \quad I_A(0) = I_{A0} \\
&I_L = I_{L0}
\end{aligned}$$

This will be transformed into a single second order differential equation by taking the derivative of the first equation and inserting the second:

$$\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{1}{L}R = \frac{1}{L}R^* \quad , \quad R(0) = 0 \quad , \quad I_A(0) = I_{A0}$$

d. The period of oscillation of the solution is given by

$$\omega^2 = \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{L}$$

e.

eindimensional		mehrdimensional	x
linear	x	nicht-linear	
mit konstanten Koeffizienten	x	mit variablen Koeffizienten	
homogen		nicht homogen	x

f. In the form using first order IVPs, the model is

$$\begin{aligned}
&\frac{dR}{dt} = I_A - I_L \quad , \quad R(0) = 0 \\
&\frac{dI_A}{dt} = \frac{1}{L}(R^* - R) \quad , \quad I_A(0) = I_{A0} \\
&I_L = \beta R
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
&\frac{dR}{dt} = I_A - \beta R \quad , \quad R(0) = 0 \\
&\frac{dI_A}{dt} = \frac{1}{L}(R^* - R) \quad , \quad I_A(0) = I_{A0}
\end{aligned}$$

This is transformed into a single second-order differential equation which corresponds to the basic form of an initial value problem for damped oscillations:

$$\begin{aligned}
&\frac{dR}{dt} = I_A - \beta R \quad , \quad R(0) = 0 \\
&\frac{dI_A}{dt} = \frac{1}{L}(R^* - R) \quad , \quad I_A(0) = I_{A0} \\
&\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{dI_A}{dt} - \beta\frac{dR}{dt} = \frac{1}{L}(R^* - R) - \beta\frac{dR}{dt} \\
&\frac{d^2R}{dt^2} + \beta\frac{dR}{dt} + \frac{1}{L}R = \frac{1}{L}R^* \quad , \quad R(0) = 0 \quad , \quad I_A(0) = I_{A0}
\end{aligned}$$

g. The solution of the initial value problem formulated in c should be a sine-function with amplitude R_A and angular frequency ω, shifted by R_0 along the R-axis and having a phase φ:

$$R(t) = R_0 + R_A \sin(\omega t + \varphi)$$

The first and second derivatives of this function are

$$\frac{dR}{dt} = \omega R_A \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad \frac{d^2R}{dt^2} = -\omega^2 R_A \sin(\omega t + \varphi)$$

R_0, R_A, φ and ω have to be determined from the differential equation(s) and the initial conditions. Inserting the assumed solution into the second order DE, we obtain

$$-\omega^2 R_A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{L}\left(R_0 + R_A \sin(\omega t + \varphi)\right) = \frac{1}{L} R^*$$

which means that

$$\omega^2 = \frac{1}{L} \quad , \quad R_0 = R^*$$

Inserting the function $R(t)$ into the first initial condition leads to

$$0 = R_0 + R_A \sin(\varphi)$$

The second initial condition is evaluated with the help of the law of balance for R:

$$\begin{aligned} &\frac{dR}{dt} = I_A - I_{L0} \\ &I_A(0) = \left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=0} + I_{L0} \\ &\Rightarrow \quad I_{A0} = \omega R_A \cos(\varphi) + I_{L0} \end{aligned}$$

These are two conditions for the missing parameters R_A and φ. They can be solved to yield:

$$\begin{aligned} R_A^2 &= L\left(I_{A0} - I_{L0}\right)^2 + R^{*2} \\ \varphi &= \arcsin\left[-\frac{R^*}{\sqrt{L\left(I_{A0} - I_{L0}\right)^2 + R^{*2}}}\right] \end{aligned}$$

Relevance of the parameters:

L dedermines the frequency of oscillation.

R^* equals the average value of $R(t)$ (the vertical shift of the sine-function).

Together, I_{A0}, I_{L0} and R^* are responsible for the missing parameters R_A (amplitude) and φ (phase).