Natur, Technik, Systeme

End of Semester Exam, June 2011

Zweites Semester Wirtschaftsingenieurwesen, ZHAW, WI10

Allgemeine Bemerkungen

Dauer der Prüfung: 150 Minuten.

Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Erlaubte Hilfsmittel: **Bücher und persönlich verfasste Zusammenfassung**.
Rechen- und Schreibzeugs.

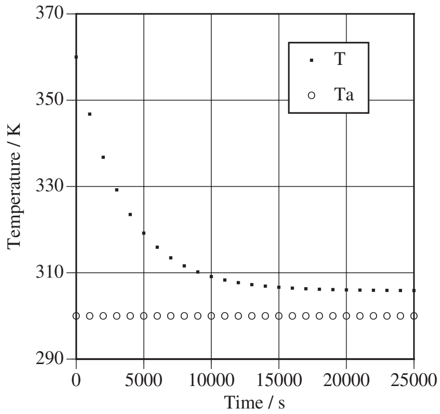
Bitte lösen Sie **jede Aufgabe auf einem separaten Blatt**. Die Blätter für die drei Aufgaben müssen separat abgegeben werden!

Schreiben Sie jedes Blatt an (Name, Datum, Prüfung, Nummer der Aufgabe).

Geben Sie die Aufgabenblätter mit Ihren Lösungen ab. Schreiben Sie die Aufgabenblätter mit Ihrem Namen an.

Punkteverteilung:
Augabe 1: 12
Augabe 2: 14
Augabe 3: 14

1. In einem dünnwandigen zylindrischen Behälter befindet sich heisses Glykol, das eine konstante spezifische Entropiekapazität von 7.8 J/(K^{2}kg) hat. Es kühlt in einer Umgebung mit konstanter Temperatur ab; der Entropiestrom von Glykol an die Umgebung ist proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Glykol und Umgebung, d.h., der Entropieleitwert von Glykol an die Umgebung ist konstant ($1.03 \cdot 10^{-3}$ W/K^2). Während des Kühlens wird durch Rühren im Glykol mit konstanter Rate Entropie erzeugt. Deckel und Boden des zylindrischen Gefässes sind perfekt isoliert. Eine konkrete Beobachtung der Temperaturen ist im nebenstehenden Diagramm dargestellt.



Daten: Radius des zylindrischen Gefässes: 3.00 cm, Höhe des Gefässes: 15.0 cm, Dichte von Glykol: 1110 kg/m^3.

a. Bestimmen Sie die Masse des Glykols und den Entropiedurchgangskoeffizienten h_S. [1 P]

b. (1) Berechnen Sie die Zeitkonstante mit Hilfe der oben gegeben Parameter und Daten. (2) Bestimmen Sie die Zeitkonstante graphisch aus dem Diagramm (erklären Sie die Konstruktion). Vergleichen Sie die Werte. [2.5 P]

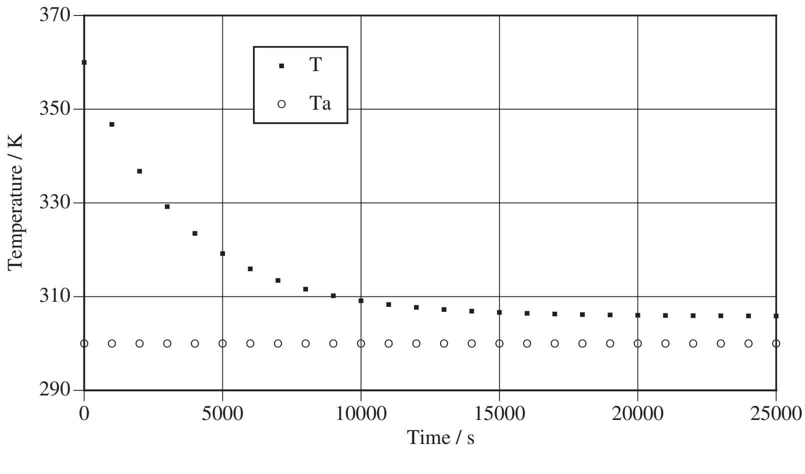
c. Bestimmen Sie mit Hilfe der Daten und des Diagramms die Entropieproduktionsrate. [2.5 P]

d. Der Radius des zylindrischen Behälters wird auf 2.0 cm verkleinert. Alles Andere bleibt wie vorher. Zeichnen Sie den Verlauf der Temperatur für das kleinere Gefäss so genau wie möglich in das beiliegende Diagramm. Erklären Sie Ihre dazu nötigen Rechnungen. [3 P]

e. Beweisen Sie, dass die Differentialgleichung für die Temperatur des Glykols die folgende Form hat: [3 P]

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{G_S}{K_S}\left(T - T_a\right) + \frac{1}{K_S}\Pi_S$$

Parameter des Systems: Anfangstemperatur T_0, Umgebungstemperatur T_a, Entropieproduktionsrate Π_S, Entropiekapazität des Glykols K_S, Entropieleitwert zwischen Glykol und Umgebung G_S.



2. *Cervelatverkauf im Sommer*. Die Besitzerin eines grossen Restaurants verkauft über die Mittagszeit grillierte Cervelat. Wir nehmen an, das Restaurant sei so gross, dass wir alle Raten und Mengengrössen als kontinuierlich betrachten können. Die Besitzerin weiss aus Erfahrung, dass sie im Schnitt S Cervelat pro Minute verkauft. Aufgrund der guten Lage des Restaurants ist diese Verkaufszahl in der Regel konstant.

   Eine Methode des professionellen Cervelatbratens besteht darin, mit zwei Grills zu arbeiten: Auf dem ersten (dem Bratgrill) werden die Cervelats angebraten und auf dem zweiten (dem Warmhaltegrill) werden sie bis zum Verkauf „gelagert". Da Cervelats nicht allzu lange warmgehalten werden sollten, sollte der Grilliermeister darauf achten, dass idealerweise eine durch die Erfahrung gegebene Anzahl $C_0 = 150$ Cervelat auf dem Warmhaltegrill liegen. (Zusammen mit der Verkaufsrate $S = 30$ Cervelat/min führt C_0 zu einer optimalen Verweildauer auf dem Warmhaltegrill).

   Ihre Aufgabe besteht darin, verschiedene Strategien für die Versorgung des Warmhaltegrills zu untersuchen. Diese Versorgung geschieht über den Bratgrill, welcher $B(t)$ Cervelat pro Minute produziert. Diese Versorgungsrate ist nicht konstant und kann vom Grilliermeister gesteuert werden.

   Unter idealen Bedingungen sind die Verkaufsrate S und die Grösse C_0 konstant, es kann aber sein, dass eine grössere Gruppe Cervelatliebhaber vorbeikommt oder Stammgäste ausfallen. Dadurch wird die Anzahl Cervelat $C(t)$ auf dem Warmhaltegrill im Allgemeinen von C_0 abweichen.

   a. Wie gross muss $B(t)$ an einem idealen Tag sein, damit der Warmhaltegrill mit C_0 Cervelat bestückt ist? Wieviel Zeit verbringt ein Cervelat unter diesen Bedingungen ungefähr auf dem Warmhaltegrill? [2 P]

   b. Nehmen Sie an, an einem Tag (C_0 Cervelat auf dem Warmhaltegrill) kommt überraschend eine Gruppe hungriger Gäste vorbei und kauft 2/3 der fertig gebratenen Cervelats (Nehmen Sie an, dies geschehe zur Zeit $t = 0$). Um im Laufe der Zeit wieder C_0 Würste auf den Warmhaltegrill zu bekommen, wird die Bratrate $B(t)$ erhöht, und zwar so, dass die Erhöhung von $B(t)$ proportional zur Differenz zwischen C_0 und $C(t)$ ist. Die Proportionalitätskonstante sei k. Beachten Sie: Diese Erhöhung wird zum in Aufgabe (a) gefundenen Grundwert für die Bratrate hinzuaddiert! [5 P]

      (b1) Formulieren Sie das vollständige Anfangswertproblem für $C(t)$ mit Bratrate $B(t)$ und Verkaufsrate S.

      (b2) Was ist die Einheit von k?

      (b3) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $C(t)$ möglichst genau für $k = 2$.

   c. Eine andere Strategie zur Änderung der Bratrate $B(t)$ besteht darin, nicht die Bratrate selber sondern die Änderung von $B(t)$ proportional zur Differenz von C_0 und $C(t)$ zu machen (mit einer Proportionali-tätskonstante A). Nehmen Sie an, zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $B(0) = S$. Ebenfalls sei $C(0)$ wieder gleich wie in Aufgabe (b). [5 P]

      (c1) Formulieren Sie das vollständige Anfangswertproblem für die beiden Grössen $C(t)$ und $B(t)$.

      (c2) Formulieren Sie dieses als Differentialgleichung zweiter Ordnung nur für $B(t)$ (mit Anfangswerten!).

      (c3) Skizzieren Sie den Verlauf der Bratrate $B(t)$ und beschriften Sie die Skizze soweit wie möglich. Die Konstante A sei gleich $0.050\ \mathrm{min}^{-2}$.

   d. Wenn wir 150 Cervelat auf dem Warmhaltegrill hatten und 100 davon verkauften, wieso legen wir dann nicht einfach 100 Cervelat auf den Bratgrill? Wir möchten eine plausible Antwort lesen. Hier geht es nicht um Formeln, und es gibt auch nicht *die* richtige Antwort. [2 P]

3. Betrachten Sie das System, das durch folgende Differentialgleichung beschrieben wird

$$\ddot{x} = -\dot{x} + x$$

a. Drücken Sie die Differentialgleichung durch zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung aus. [2 P]

b. Sie möchten das Anfangswertproblem, das durch die Differentialgleichung und durch $x(t = 0) = -1$ und $\dot{x}(t = 0) = 2$ gegeben ist, mit Madonna lösen. Skizzieren Sie den Flowchart Ihres Modells mit allen benötigten Speichern, Flüssen und Parametern. Geben Sie alle Formeln und Startwerte an und ordnen Sie sie den Elementen Ihres Flowcharts zu. [2 P]

c. Bestimmen und skizzieren Sie die Nullklinen des Systems im x_1-Bereich zwischen – 3 und 3 und im x_2-Bereich zwischen – 3 und 3. [2 P]

d. Skizzieren Sie das Vektorfeld des Systems im x_1-Bereich zwischen – 3 und 3 und im x_2-Bereich zwischen – 3 und 3. Wählen Sie die Auflösung Ihrer Skizze so, dass Sie in jedem Teilgebiet, das bezüglich der Vorzeichen beider Vektorkomponenten homogen ist, mindestens einen Vektor plazieren. [3 P]

e. Bestimmen Sie alle Gleichgewichte des Systems. [2 P]

f. Skizzieren Sie das zeitliche Verhalten des Systems (von x_1 und x_2) in fünf x-t -Diagrammen für alle unten angegebenen Anfangswerte. Wählen Sie die Zeitachse mindestens so lang, dass Sie die gesamte Dynamik, welche in Ihrem Vektorfeld abgebildet ist, darstellen können. Stellen Sie v.a. die Vorzeichen der Dynamik korrekt dar. [3 P]

1. $\left(x_1 = -2, x_2 = -2\right)$
2. $\left(x_1 = 0, x_2 = 0\right)$
3. $\left(x_1 = 0, x_2 = -2\right)$
4. $\left(x_1 = 0, x_2 = 2\right)$
5. $\left(x_1 = 2, x_2 = 2\right)$

Solutions

1. Cooling glycol

a.

$$V = \pi r^2 h$$
$$m = \rho V = \rho \pi r^2 h = 1110 \cdot \pi \cdot 0.030^2 \cdot 0.15\,\text{kg} = 0.471\,\text{kg}$$

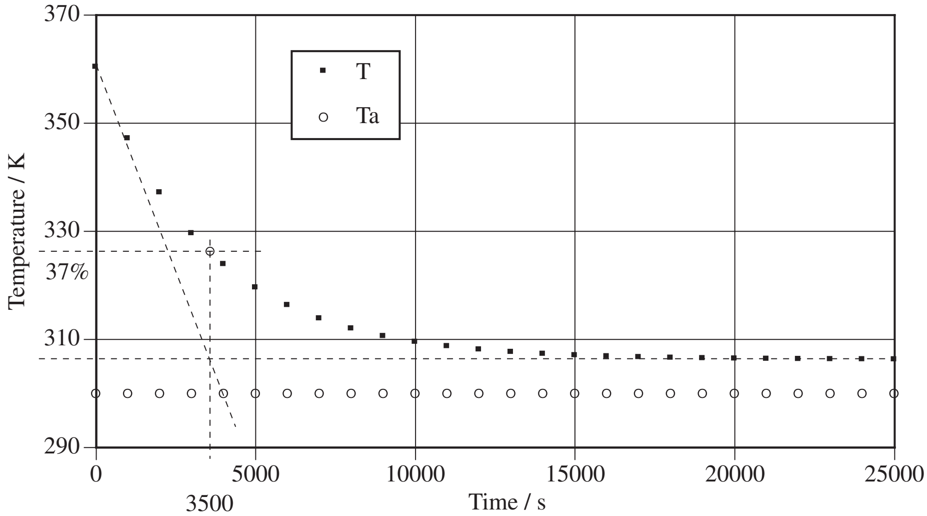
$$G_S = A h_S$$
$$h_S = \frac{1}{A} G_S = \frac{1}{2\pi r h} G_S = \frac{1}{2\pi \cdot 0.030 \cdot 0.15} \cdot 1.03 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{K}^2\text{m}^2}$$
$$= 3.64 \cdot 10^{-2} \frac{\text{W}}{\text{K}^2\text{m}^2}$$

b. According to the differential equation in (e), the time constant is given by

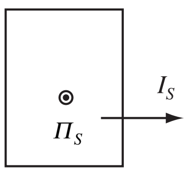
$$\tau = \frac{K_S}{G_S} = \frac{m k_S}{G_S} = \frac{0.471 \cdot 7.8}{1.03 \cdot 10^{-3}}\,\text{s} = 3570\,\text{s}$$

(This follows directly from an analogous electrical model.)

Graphical determination:



c. Use the steady-state condition:



$$\dot{S} = \Pi_S - I_S \quad , \quad \dot{S} = 0$$
$$I_S = G_S\left(T_\infty - T_a\right)$$
$$\Rightarrow \quad \Pi_S = G_S\left(T_\infty - T_a\right) = 1.03 \cdot 10^{-3} \cdot \left(306 - 300\right) \frac{\text{W}}{\text{K}} = 6.2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

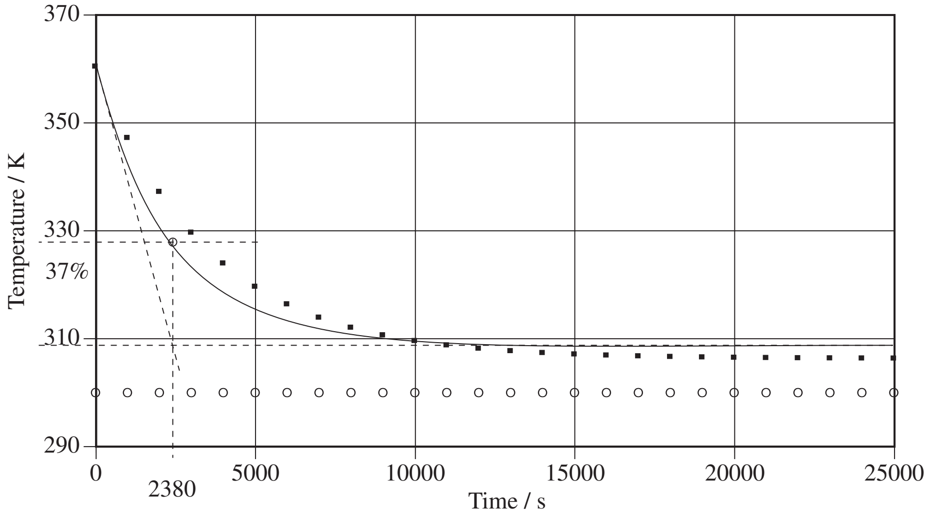
d. Time constant and steady-state temperature change (mass and surface change, therefore KS and GS change:

$$K_S = \rho V k_S = \rho \pi r^2 h k_S = 1110 \cdot \pi \cdot 0.020^2 \cdot 0.15 \cdot 7.8 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}^2} = 1.63 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}^2}$$

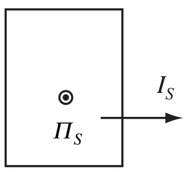
$$G_S = A h_S = 2\pi r h h_S = 2\pi \cdot 0.020 \cdot 0.15 \cdot 3.64 \cdot 10^{-2} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}^2} = 6.86 \cdot 10^{-4} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}^2}$$

$$\tau = \frac{K_S}{G_S} = \frac{1.63}{6.86 \cdot 10^{-4}} s = 2380\, s$$

$$\Pi_S = G_S \left(T_\infty - T_a \right) \quad \Rightarrow \quad T_\infty - T_a = \frac{\Pi_S}{G_S} = \frac{6.2 \cdot 10^{-3}}{6.86 \cdot 10^{-4}} \mathrm{K} = 9.0\,\mathrm{K}$$



e. Model:



$$\frac{dS}{dt} = \Pi_S - I_S$$

$$\frac{dS}{dt} = K_S \frac{dT}{dt}$$

$$I_S = G_S \left(T - T_A \right)$$

$$\Rightarrow \quad K_S \frac{dT}{dt} = \Pi_S - G_S \left(T - T_A \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = \frac{1}{K_S} \Pi_S - \frac{G_S}{K_S} \left(T - T_A \right)$$

Solution of the model:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{G_S}{K_S}\left(T - T_a\right) + \frac{1}{K_S}\Pi_S$$

$$T(t) = A + B\exp(-\lambda t) \quad , \quad \frac{dT}{dt} = -\lambda B\exp(-\lambda t)$$

$$-\lambda B\exp(-\lambda t) = -\frac{G_S}{K_S}\left(A + B\exp(-\lambda t) - T_a\right) + \frac{1}{K_S}\Pi_S$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{G_S}{K_S}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{G_S}{K_S}\left(A - T_a\right) + \frac{1}{K_S}\Pi_S \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{G_S}\Pi_S + T_a$$

$$\textit{Initial condition}: \quad T_0 = A + B \quad \Rightarrow \quad B = T_0 - T_a - \frac{1}{G_S}\Pi_S$$

$$\Rightarrow \quad T(t) = \frac{1}{G_S}\Pi_S + T_a + \left(T_0 - T_a - \frac{1}{G_S}\Pi_S\right)\exp\left(-\frac{G_S}{K_S}t\right)$$

Problem 2

a) Es gilt

$$\frac{dC}{dt} = 0 = (B(t) - S)$$
$$C(0) = C_0$$
$$\Rightarrow B(t) = S$$

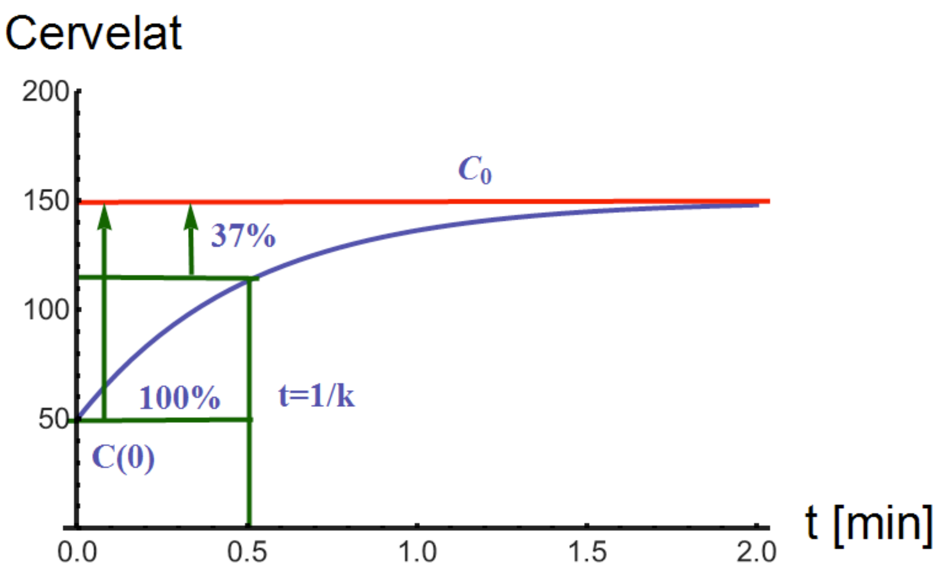
Bemerkung: Die Gleichung als solche ist nicht verlangt, B(t) = S reicht als Lösung.

Ein Cervelat verbringt etwa C_0 / S = 5 Minuten auf dem Warmhaltegrill.

b) Es gilt

$$\frac{dC}{dt} = B(t) - S$$
$$= S + k(C_0 - C(t)) - S$$
$$= k(C_0 - C(t)$$
$$C(0) = \frac{1}{3} C_0$$

Die Proportionalitätskonstante k hat die Einheit min^{-1}



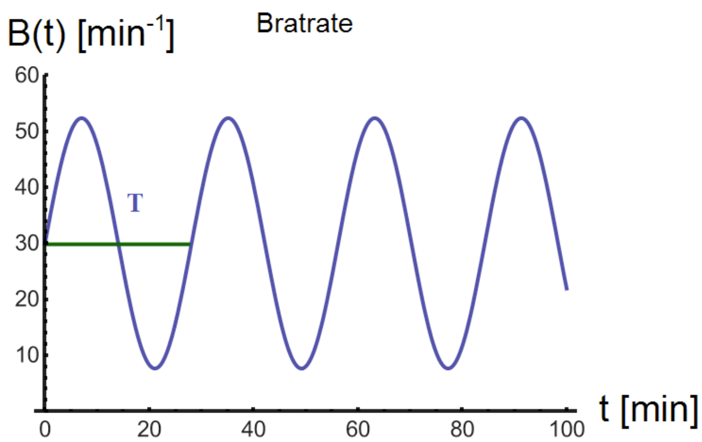
c) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{dC}{dt} = B(t) - S \\
&\frac{dB}{dt} = A(C_0 - C(t)) \\
&C(0) = \frac{1}{3}C_0 \\
&B(0) = S
\end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2B}{dt^2} = -A\frac{dC(t)}{dt} \\
&\Rightarrow \frac{d^2B}{dt^2} = -AB(t) + AS \\
&C(0) = \frac{1}{3}C_0 \\
&\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=0} = A(C_0 - C(0)) = \frac{2A}{3}C_0
\end{aligned}$$

Weiter gilt für die Periode $T = \frac{2\pi}{\sqrt{A}}$.



d) Würden wir auf einmal 100 Cervelat auf den Bratgrill legen, müssten wir die danach alle auf den Warmhaltegrill bringen. Da die durchschnittliche Verkaufsrate 30 Würste pro Minute beträgt, würden einige Würste länger als 5 Minuten auf dem Grill liegen.

Problem 3

a.

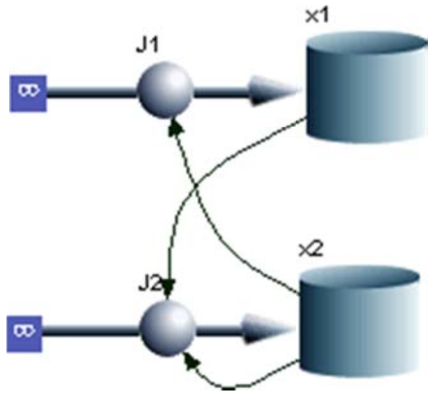
$$\ddot{x} = -\dot{x} + x$$

$$x = x_1$$

$$\dot{x} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{x} = \dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

b.

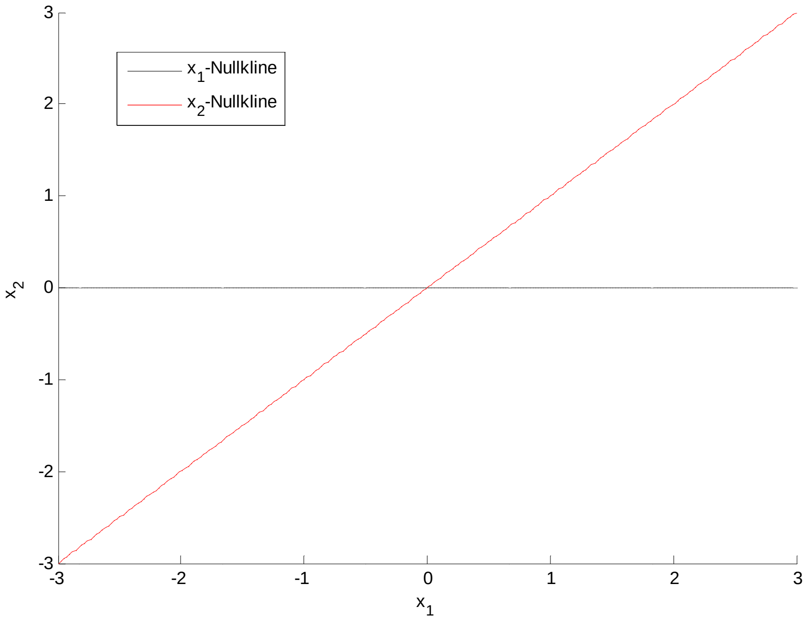


{Top model}

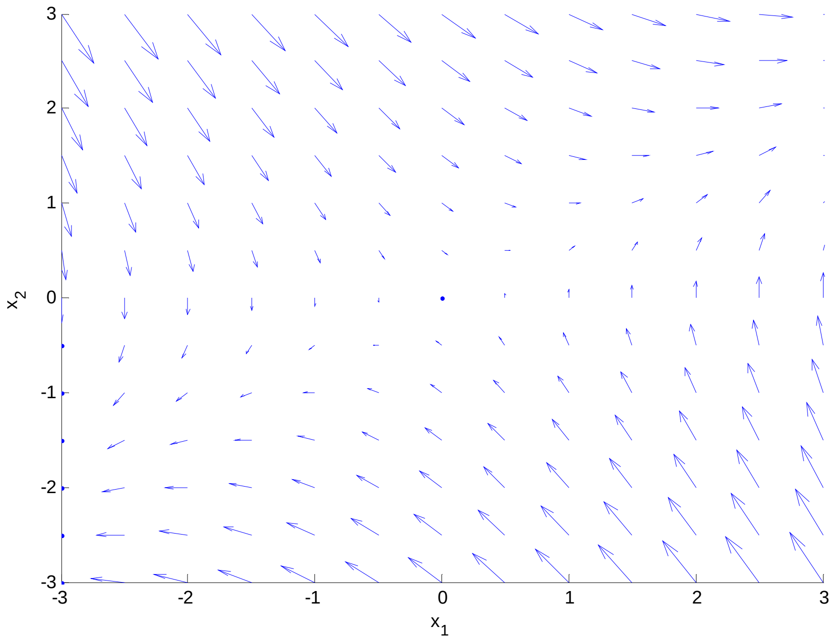
{Reservoirs}
d/dt (x1) = + J1
INIT x1 = -1
d/dt (x2) = + J2
INIT x2 = 2

{Flows}
J1 = x2
J2 = x1-x2
{Globals}
{End Globals}

c.



d.



e.

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f.