Natur, Technik, Systeme

Test, Mai 2012

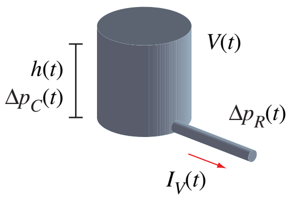
Zweites Semester WI11

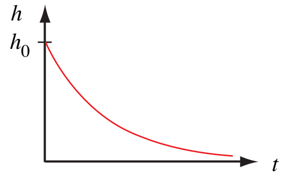
Erlaubte Hilfsmittel: Bücher und persönlich verfasste Zusammenfassung. Rechen- und Schreibzeugs.

Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Dauer des Tests: 60 Minuten.

Kühlen von Glykol





In einem dünnwandigen und oben *geschlossenen* Metallbehälter (hydraulische Kapazität C_V) befindet sich heisses Glykol, das eine *konstante* spezifische Entropiekapazität k_S und eine *konstante* Dichte ρ hat. Es fliesst durch ein horizontales Rohr am Boden aus dem Gefäss, und es kühlt durch die Wand in einer Umgebung mit konstanter Temperatur T_a ab. (Im Deckel hat es ein ganz kleines Loch, damit Luft nachfliessen kann. Damit kann sich der Druck mit der Umwelt ausgleichen. *Verdunstung* des Glykols kann man aber *vernachlässigen*.)

Die Strömung durch das Rohr ist laminar mit einem konstanten Widerstandswert R_V. (Wir nehmen an, dass die Viskosität trotz Temperaturänderung *konstant* bleibt.)

Der Entropiestrom von Glykol an die Umgebung ist proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Glykol und Umgebung (mit einem Entropieleitwert G_S).

Am Anfang beträgt das Volumen des Glykols V_0 und die Anfangstemperatur ist T_0.

$$m = \rho V$$
$$I_m = \rho I_V$$

a. Leiten Sie das Anfangswertproblem für die Masse des Glykols im Behälter her. [Sie brauchen dazu den Zusammenhang des Volumens mit der Masse und des Volumenstroms mit dem Massenstrom (siehe Gleichungen auf der Seite).] [3 P]

b. Zeigen Sie, dass die Masse und der Massenstrom durch das Rohr durch folgende Funktionen der Zeit gegeben sind [2 P]:

$$m(t) = \rho V_0 \exp\left(-t/\left(R_V C_V\right)\right)$$
$$I_m(t) = \frac{\rho V_0}{R_V C_V} \exp\left(-t/\left(R_V C_V\right)\right)$$

c. Formulieren Sie die Bilanzgleichung für die Entropie des Glykols, ohne dabei konstitutive Beziehungen einzusetzten. Erklären Sie Ihr Ergebnis. [2 P]

d. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem für die Temperatur auf

$$km(t)\frac{dT}{dt} = -G_S\left(T - T_a\right) \quad , \quad T(0) = T_0$$

führt. [Die konstitutiven Beziehungen für die spezifische Entropie und den konvektiven Entropiestrom des Glykols, die Sie für diese Herleitung brauchen, sind nebenstehend aufgeführt.] [3 P]

$$s = k_S\left(T - T_{ref}\right)$$
$$I_{S,conv} = k_S I_m\left(T - T_{ref}\right)$$

e. Wieso ist der hydraulische Vorgang vom thermischen bei diesem Beispiel entkoppelt? Wie könnten sie denn überhaupt gekoppelt sein? [1 P]

f. [Zusatzaufgabe] Setzen Sie die Lösung aus dem hydraulischen Problem in das thermische Anfangswertproblem ein, und lösen Sie die Differentialgleichung. Berechnen Sie $T(t)$. [3 P]

g. [Zusatzaufgabe] Nehmen Sie an, es habe kein Loch im Deckel des Gefässes (luftdichtes Gefäss, mit etwas Luft anfänglich bei Umgebungsdruck über dem Glykol). Wieso und wie ändert sich dann das *kapazitive Verhalten* des Systems? Geben Sie eine qualitative Begründung. [2 P]

Natural and Technical Systems

Test, May 2012

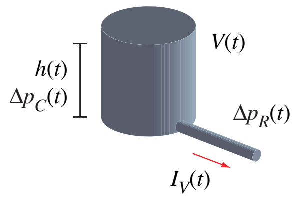
Second Semester WI11

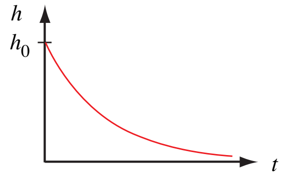
Allowed tools: **Books and personally written summary**. Calculators and writing materials.

Answers must be explained and must be documented.

Duration of the exam: 60 minutes.

Cooling of Glycol





Hot glycol is stored in a thin-walled container (hydraulic capacitance C_V) having a lid with a small hole. (The hole permits exchange of air and equilibration of pressure of the air above the glycol with that of the environment, but does *not* allow for evaporation.) The liquid has a *constant* specific entropy capacitance k_S and a *constant* density ρ. It flows out of the tank through a horizontal pipe, and it cools through the wall in an environment having a constant temperature T_a.

The flow through the pipe is laminar with a constant resistance R_V. (We assume the viscosity of glycol to stay constant despite the change of temperature.)

The entropy current from the glycol into the environment is proportional to the difference of temperatures between the glycol and the environment (with an entropy conductance equal to G_S).

Initially, the volume of glycol and its temperature are equal to V_0 and T_0, respectively.

a. Derive the initial value problem for the mass of glycol in the container. [You need the relation between volume and mass on the one hand, and volume current and mass current on the other.] [3 P]

$$m = \rho V$$
$$I_m = \rho I_V$$

b. Demonstrate that the mass and the mass current are given by the following functions of time [2 P]:

$$m(t) = \rho V_0 \exp\left(-t/\left(R_V C_V\right)\right)$$
$$I_m(t) = \frac{\rho V_0}{R_V C_V} \exp\left(-t/\left(R_V C_V\right)\right)$$

c. Formulate the law of balance of entropy for the glycol in the container *without* inserting constitutive relations. Explain your result. [2 P]

d. Show that the initial value problem for the temperature of glycol leads to

$$km(t)\frac{dT}{dt} = -G_S\left(T - T_a\right) \quad , \quad T(0) = T_0$$

[The constitutive relations for the specific entropy and the convective entropy current used in this derivation are shown on the right.] [3 P]

$$s = k_S\left(T - T_{ref}\right)$$
$$I_{S,conv} = k_S I_m\left(T - T_{ref}\right)$$

e. Why are the hydraulic and thermal processes decoupled in this example? How could they be coupled? [1 P]

f. [Additional question] Insert the solution for the hydraulic problem into the thermal initial value problem and solve the resulting differential equation. Derive $T(t)$. [3 P]

g. [Additional question] Assume that the lid does not have a hole (i.e., we have a completely airtight container with some air at environmental pressure above the glycol). Why and how does the *capacitive behavior* of the system change? Give qualitative reasoning. [2 P]

Solutions

Gylcol

a.

$$\frac{dm}{dt} = -I_m \quad , \quad m(0) = \rho V_0$$
$$I_m = \rho I_V = \rho \frac{1}{R_V} \Delta p_C = \rho \frac{1}{R_V} \frac{1}{C_V} V = \frac{1}{R_V C_V} m$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{1}{R_V C_V} m \quad , \quad m(0) = \rho V_0$$

b. The initial value problem leads to the differential equation for exponential decay:

$$m(t) = m_0 \exp(-\lambda t) = \rho V_0 \exp\left(-t/\left(R_V C_V\right)\right)$$

From the law of balance of mass we obtain

$$I_m = -\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\rho V_0 \exp\left(-t/\left(R_V C_V\right)\right)\right)$$
$$= -\rho V_0 \left(-\frac{1}{R_V C_V}\right) \exp\left(-t/\left(R_V C_V\right)\right)$$

c.

$$\frac{dS_{CV}}{dt} = -I_{S,cond} - I_{S,conv}$$

There are only two processes that can change the entropy of the control volume (SCV): conductive flow of entropy through the walls of the container, and convective entropy transport with the glycol flowing out of the tank.

d.

$$\frac{dS_{CV}}{dt} = -I_{S,cond} - I_{S,conv}$$
$$\frac{d}{dt}\left[m k_S \left(T - T_{ref}\right)\right] = -G_S\left(T - T_a\right) - k_S I_m \left(T - T_{ref}\right)$$
$$m k_S \frac{d}{dt}\left(T - T_{ref}\right) + k_S\left(T - T_{ref}\right)\frac{dm}{dt} = -G_S\left(T - T_a\right) - k_S I_m \left(T - T_{ref}\right.$$
$$dm/dt = -I_m \quad \Rightarrow \quad m k_S \frac{d}{dt}\left(T - T_{ref}\right) = -G_S\left(T - T_a\right)$$
$$\Rightarrow \quad k_S m \frac{dT}{dt} = -G_S\left(T - T_a\right)$$

e. The hydraulic problem could be coupled to the thermal one through the temperature dependence of viscosity (influences RV) and density (influences CV). Since viscosity and density are assumed to be constant, there is no coupling.

f.

$$k_S m \frac{dT}{dt} = -G_S\left(T - T_a\right) \quad , \quad m(t) = \rho V_0 \exp\left(-t/\left(R_V C_V\right)\right)$$
$$\Rightarrow \quad k_S \rho V_0 \exp\left(-t/\left(R_V C_V\right)\right)\frac{dT}{dt} = -G_S\left(T - T_a\right)$$

This equation can be solved by separation of variables:

$$\int_{T_0}^{T} \frac{k_S \rho V_0}{G_S\left(T - T_a\right)} dT = -\int_0^t \frac{1}{\exp\left(-t/\left(R_V C_V\right)\right)} dt = -\int_0^t \exp\left(t/\left(R_V C_V\right)\right) dt$$
$$\frac{k_S \rho V_0}{G_S} \ln\left(T - T_a\right)\Big|_{T_0}^{T} = -R_V C_V \exp\left(t/\left(R_V C_V\right)\right)\Big|_0^t$$
$$\frac{k_S \rho V_0}{G_S} \ln\left(\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}\right) = -R_V C_V\left[\exp\left(t/\left(R_V C_V\right)\right) - 1\right]$$
$$T(t) = T_a + \left(T_0 - T_a\right)\exp\left(-a\left(\exp(t/\tau) - 1\right)\right) \quad , \quad a = \frac{\tau G_S}{k_S m_0} \quad , \quad \tau = R_V C_V \quad , \quad m_0 = \rho V_0$$

g. The pressure of the air above the glycol will change so that the pressure difference in the tank will change: it will depend not only upon the level of glycol but also upon the pressure of the air in the space above the glycol. According to the loop rule, the pressure difference along the pipe will change as well.

Assume the volume of the tank to be V_{Tank}. Furthermore, assume the inital pressure and temperature of the air in the tank to be p_a and T_0, respectively. Also assume that the temperature of the air is equal to the temperature of glycol at all times. The pressure of the air above the glycol will then be calculated according to

$$p_{Air} = \frac{1}{V_{air}} n R T_{Air}$$
$$V_{Air} = V_{Tank} - V$$
$$T_{Air} = T$$
$$n = \frac{p_a\left(V_{Tank} - V_0\right)}{R T_0}$$