Natur, Technik, Systeme

End of Semester Exam, June 2012

Zweites Semester Wirtschaftsingenieurwesen, ZHAW, WI11

Allgemeine Bemerkungen

Dauer der Prüfung: 150 Minuten.

Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Erlaubte Hilfsmittel: **Bücher und persönlich verfasste Zusammenfassung**.
Rechen- und Schreibzeugs.

Bitte lösen Sie **jede Aufgabe auf einem separaten Blatt**. Aufgabe 1 muss separat abgegeben werden!

Schreiben Sie jedes Blatt an (Name, Datum, Prüfung, Nummer der Aufgabe).

Geben Sie die Aufgabenblätter mit Ihren Lösungen ab. Schreiben Sie die Aufgabenblätter mit Ihrem Namen an.

Punkteverteilung:
Augabe 1: 14
Augabe 2: 13
Augabe 3: 13

1. Betrachten Sie das System, das durch folgende Differentialgleichungen beschrieben wird

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \cdot y \\ \dot{y} &= 1 - x - y\end{aligned}$$

a. Drücken Sie das System durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung für y aus. [2 P]

b. Sie möchten das Anfangswertproblem, das durch die Differentialgleichung und durch ($x(0) = 1$, $y(0) = 1$) gegeben ist, mit Madonna lösen. Skizzieren Sie den Flowchart Ihres Modells mit allen benötigten Speichern, Flüssen und Parametern. Geben Sie alle Formeln und Startwerte an und ordnen Sie sie den Elementen Ihres Flowcharts zu. [1 P]

c. Bestimmen und skizzieren Sie die Nullklinen des Systems im Bereich $x \in [-1.5, 1.5]$, $y \in [-1.5, 1.5]$. [2 P]

d. Skizzieren Sie das Vektorfeld des Systems im Bereich $x \in [-1.5, 1.5]$, $y \in [-1.5, 1.5]$. Wählen Sie die Auflösung Ihrer Skizze so, dass Sie in jedem Teilgebiet, das bezüglich der Vorzeichen beider Vektorkomponenten einheitlich ist, mindestens einen Vektor plazieren. [3 P]

e. Bestimmen Sie alle Gleichgewichte des Systems. [2 P]

f. Skizzieren Sie das Verhalten des Systems im Zustandsraum für alle unten angegebenen Anfangswerte. Ihre Skizze sollte die Richtung der Trajektorien in entsprechenden Teilgebieten des Zustandsraumes qualitativ korrekt wiedergeben. [3 P]

- $(x = -1, y = -1)$
- $(x = -0.5, y = -1)$
- $(x = 0, y = -1.5)$
- $(x = 0, y = 1.5)$
- $(x = 0.5, y = -1)$
- $(x = 1.5, y = -1)$
- $(x = 0.5, y = 1)$

2. Ein einfaches solares Warmwasser-System (siehe Figur) besteht aus einem Kollektor von 10 m^2 Fläche und einem Speichertank für das warme Wasser mit einem Volumen von 1.0 m^3. Der Tank und die Leitungen vom Kollektor zum Tank und zurück sind perfekt isoliert. Der Kollektor ist an der Unterseite perfekt isoliert. Wasser zirkuliert durch den Kollektor zum Tank und wieder zurück. Das Wasser im Tank ist vollkommen durchmischt.

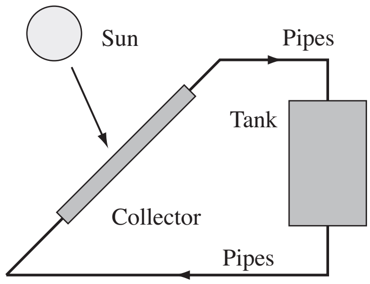
   Der Kollektor wird als aus zwei Elementen bestehend modelliert: (1) Absorber mit Abdeckung und (2) Wasser im Kollektor.

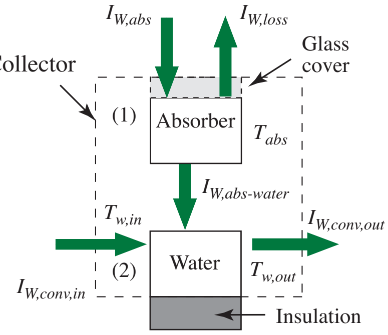
   Die Energiestromdichte der Sonnenstrahlung auf den Kollektor ist im ersten Diagramm für 12 Stunden gegeben. Der Kollektor absorbiert 90% des Sonnenlichtes. An dem hier gezeigten Tag wird kein warmes Wasser aus dem Speichertank bezogen.

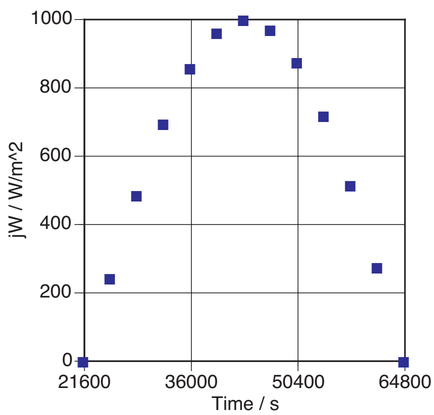
   Im zweiten Diagramm sind die Temperaturen des Absorbers und des aus dem und in den Kollektor tretenden Wassers für den Verlauf von 12 Stunden gegeben.

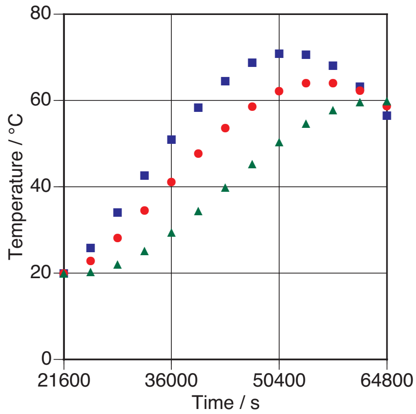
   Die Energieströme vom Absorber an das Wasser im Kollektor und vom Absorber an die Umwelt (siehe Figur unten) sind beide *proportional zur jeweiligen Temperaturdifferenz*.

   Daten: Energiekapazität des Absorberblechs und der Abdeckung: 96 kJ/K. Menge des Wassers, die immer im Kollektor ist: 100 Liter. Spezifische Energiekapazität von Wasser: 4200 J/(K·kg). Durchfluss durch den Kollektor: 0.111 kg/s. Die Umgebungstemperatur beträgt konstant 20°C.









   a. Bestimmen Sie, wieviel Energie an diesem Tag auf den Kollektor eingestrahlt wurde. [2 P]

   b. Bestimmen Sie, wieviel Energie im Speichertank an diesem Tag gespeichert wurde, indem Sie die Anfangs- und Endtemperaturen aus dem zweiten Diagramm nehmen. Wie gross ist der Wirkungsgrad der Anlage? [3 P]

   c. Wie lautet die momentane Energiebilanz für das Wasser im Kollektor formal (Gleichung; keine Zahlen, keine konstitutiven Beziehungen)? Wie lautet sie für den Absorber? [2 P]

   Machen Sie die folgenden Rechnungen für den Zeitpunkt von 12 h Mittags:

   d. Wie gross ist der konvektive Netto-Energiestrom mit dem Wasser in den und aus dem Kollektor? [2 P]

   e. Nehmen Sie nun an, die mittlere Temperatur des Wassers im Kollektor ändere sich nicht zeitlich (*stationäre Bilanz* für das Wasser). Wie gross ist demnach der Ergiestrom vom Absorber an das Wasser im Kollektor? [2 P]

   f. Wie gross ist der Energieübergangskoeffizient vom Absorber an das Wasser pro Quadratmeter Kollektorfläche? Nehmen Sie für die Berechnung die *mittlere Temperatur* des Wassers im Kollektor. [2 P]

3. Auf dem Gelände einer Versuchsanstalt steht ein offener geradwandiger Behälter mit radioaktiv verseuchtem Wasser. Das Wasser verdunstet und die einzige radioaktive Substanz im Wasser zerfällt. Die radioaktive Substanz liegt in so geringer Menge vor, dass sie die Dichte des Wassers nicht beeinflusst.

   Nehmen Sie an, die Verdunstung geschehe mit einer *konstanten* Rate (nehmen Sie das Symbol Π_V für die Verdunstungsrate). Der Wasserdampf enthält kein radioaktives Material. Das anfängliche Volumen des Wassers ist V_0.

   Die einzige radioaktive Substanz im Wasser zerfällt mit einer Rate Π_n, die proportional zur jeweiligen Menge n ist. Die Proportionalitätskonstante (die Zerfallskonstante) ist λ. Am Anfang beträgt die Stoffmenge der radioaktiven Substanz n_0. Der radioaktive Zerfall soll die Temperatur des Wassers nicht beeinflussen.

   Behandeln Sie bei Ihren Formulierungen Π_V und Π_n als *positive Grössen*.

   a. Formulieren Sie die beiden Bilanzgleichungen für das Volumen des Wassers und die Stoffmenge der radioaktiven Substanz, *ohne* dabei *konstitutive Beziehungen* zu benutzen. [2 P]

   b. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für die Füllhöhe des Wassers im Behälter, der eine Querschnittsfläche A hat. [1.5 P]

   c. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für die Stoffmenge der radioaktiven Substanz. [1.5 P]

   d. Leiten Sie die Lösungen für $n(t)$ und $V(t)$ her. Bestimmen Sie daraus die Konzentration des radioaktiven Materials als Funktion der Zeit. Sie müssen

   $$c(t) = \frac{n_0}{V_0 - \Pi_V t} \exp(-\lambda t)$$

   erhalten. [2 P]

   e. Welche Beziehung müssen die Parameter (Π_V, λ, V_0, n_0) erfüllen, damit die Konzentration am Anfang ($t = 0$) zunimmt? Damit sie bei $t = 0$ abnimmt? Für den Fall, dass sie abnimmt, hat sie dann zu einem späteren Zeitpunkt ein Minimum? [3 P]

   f. Nehmen Sie nun an, der Zerfall der radioaktiven Substanz *beeinflusse die Temperatur* des Wassers durch die dabei auftretende Entropieproduktion (die proportional zur Zerfallsrate ist). Die Verdunstungsrate sei von der Temperatur des Wassers abhängig.

      Verändert dieser Effekt die Dimension des Anfangswertproblems? Werden die Differentialgleichungen voneinander abhängig? Wenn ja, welche? Erklären Sie Ihre Überlegungen. [3 P]

Natural and Technical Systems

End of Semester Exam, June 2012

Second Semester Wirtschaftsingenieurwesen, ZHAW, WI11

General Remarks

Duration of the exam: 150 minutes.

Answers must be explained and must be documented.

Allowed tools: **Books and personally written summary**. Calculators and writing materials.

Please solve **every problem on a separate sheet**. Problem 1 must be handed in separately!

Write your name, date, exam, and number of problem on **every sheet**.

Hand in the problem statements with your solutions. Write your name on the problem statements!

Points:
Problem 1: 14
Problem 2: 13
Problem 3: 13

1. Consider the initial value problem defined by the following differential equations:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \cdot y \\ \dot{y} &= 1 - x - y\end{aligned}$$

   a. Convert the system of equations into a single differential equation of second order. [2 P]

   b. The initial value problem defined by the differential equations and the initial condition ($x(0) = 1$, $y(0) = 1$) is to be solved with Berkeley Madonna. Sketch the flowchart of your model including all reservoirs, flows, and parameters. List all formulas and initial conditions and associate them with the elements of your flowchart. [1 P]

   c. Determine and draw the nullclines of the sytem in the range $x \in [-1.5,1.5]$, $y \in [-1.5,1.5]$. [2 P]

   d. Sketch the vector field for $x \in [-1.5,1.5]$, $y \in [-1.5,1.5]$. Choose a resolution such that there is at least one vector for evey section of the phase space for which the signs of the vector components are uniform. [3 P]

   e. Determine all equilibrium points of the system. [2 P].

   f. Sketch the behavior of the system in phase space for all initial conditions given below. Your sketch must show qualitatively correct directions of the trajectories in corresponding sections of the phase space. [3 P]

      - $(x = -1, y = -1)$
      - $(x = -0.5, y = -1)$
      - $(x = 0, y = -1.5)$
      - $(x = 0, y = 1.5)$
      - $(x = 0.5, y = -1)$
      - $(x = 1.5, y = -1)$
      - $(x = 0.5, y = 1)$

2. A simple solar hot water system (see figure) consists of a collector having a surface area of 10 m^2 and a warm water storage tank having a volume of 1.0 m^3. The tank and all pipes are perfectly insulated. The collector is perfectly insulated at the bottom. Water flows through the collector to the tank and back again. In the tank, the water is perfectly mixed.

   Model the collector as consisting of two parts: (1) absorber plus glass cover, and (2) water in the collector.

   The first diagram shows the energy current density of solar radiation falling upon the collectir for 12 hours. The collector absorbs 90% of solar radiation. During the day shown, hot water is only stored, not used.

   The second diagram shows the temperatures of the absorber and of the water flowing into and out of the collector for 12 hours.

   The energy currents from the absorber to the water in the collector and from the absorber to the environment (see lower part of figure) are assumed to be *proporional to their respective temperature differences*.

   Data: Energy capacitance of absorber plus glass cover: 96 kJ/K. Amount of water in the collector at any time: 100 Liter. Specific energy capacitance of water: 4200 J/(K·kg). Flow of water through the collector: 0.111 kg/s. The ambient temperature is a constant 20°C.

   a. Determine the amount of energy falling upon the collector during this day. [2 P]

   b. Determine the amount of energy stored in the tank during this day by using the initial and final temperatures from the second diagram. Determine the efficiency of the sysytem. [3 P]

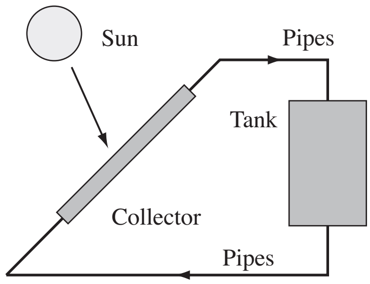
   c. Formulate the instantaneous balance of energy for the water in the collector (formula; no numbers, no constitutive relations). Do the same for the absorber. [2 P]

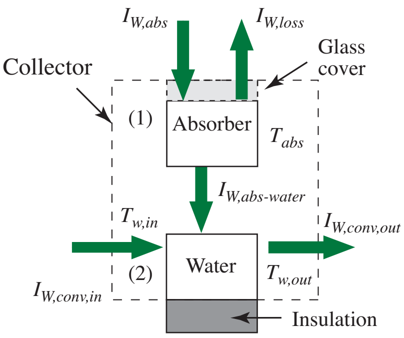
   Perform the following calculations for 12 noon.

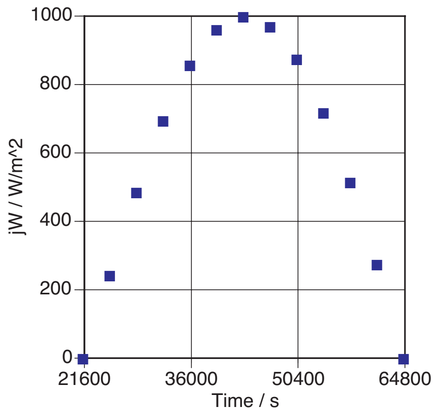
   d. What is the net convective energy current with water flowing into and out of the collector? [2 P]

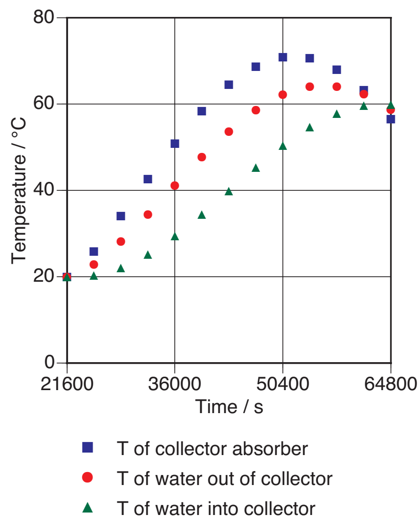
   e. Assume now that the average temperature of the water in the collector does not change (*steady-state balance* for the water!). Determine the energy current from the absorber to the water in the collector. [2 P]

   f. What is the energy transfer coefficient from absorber to water per square meter of collectir area? Use the *average temperature* of the water in the collector for your calculation. [2 P]









3. An open straight walled container with radioactively contaminated water is sitting on the grounds of a reserach facitly. The water evaporates and the only radioactive substance in the water decays. There is so little of the radiactive substance that it does not influence the density of the water.

   Assume evaporation to take place at *constant* rate (use the symbol Π_V for the rate of evaporation). The vapor does not contain any radioactive material. Initially, the volue of the water is V_0.

   The only radioactive substance decays at a rate Π_n proportional to the instantaneous amount n. The proportionality constant (the decay constant) is λ. The initial amount of radioactive substance is n_0. Assume the radioactive decay not to influence the temperatur of the water.

   In your formulas, take Π_V and Π_n to be *positive quantities*.

   a. Formulate the instantaneous laws of balance for the volume of water and the amount of radioactive substance *without* using any *constitutive relations*. [2 P]

   b. Formulate the initial value problem for the level of water in the tank. The tank has a cross section A. [1.5 P]

   c. Formulate the initial value problem for the amount of radioactive substance. [1.5 P]

   d. Derive the solutions for $n(t)$ and $V(t)$. Use this to find the concentration of radioactive material as a function of time. The result must turn out to be

   $$c(t) = \frac{n_0}{V_0 - \Pi_V t} \exp(-\lambda t)$$

   [2 P]

   e. What is the condition the paramters (Π_V, λ, V_0, n_0) have to satisfy if the concentration is to *increase* at $t = 0$? So that it *decreases* at $t = 0$? If the amount of radioactive material decreases initially, is there a minimum for $n(t)$ at a later point in time? [3 P]

   f. Assume now that the radioactive decay *influences the temperature* of the water as a result of entropy production (which is proportional to the decay rate). The evaporation rate is assumed to depend upon the temperature of the water.

      Does this effect change the *dimension* of the initial value problem? Do the differential equations become dependent upon each other? If so, which ones? Explain your thinking. [3 P]

Solutions

1. **Dynamical system**

a.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \cdot y \\ \dot{y} &= 1 - x - y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -\dot{x} - \dot{y} \\ &= -x \cdot y - \dot{y} \\ &= -(1 - \dot{y} - y)y - \dot{y}\end{aligned}$$

b.

{Reservoirs}

d/dt (x) = + J1

INIT x = 1

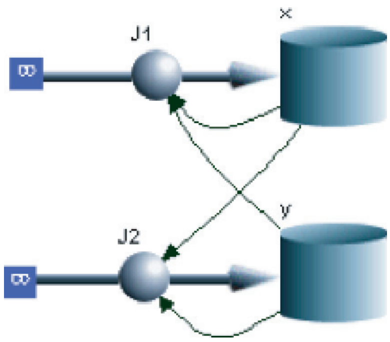
d/dt (y) = + J2

INIT y = 1

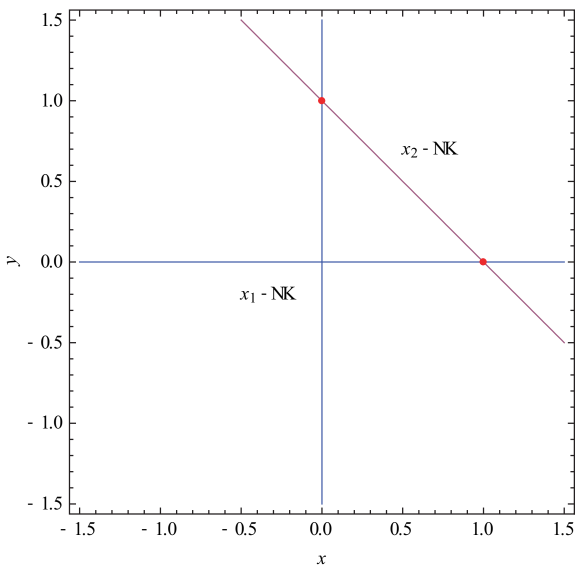
{Flows}

J1 = x*y

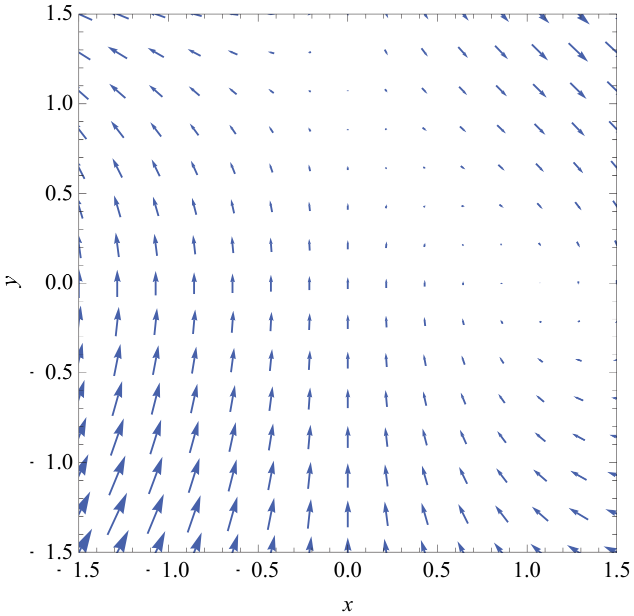
J2 = 1-x-y



c.



d.

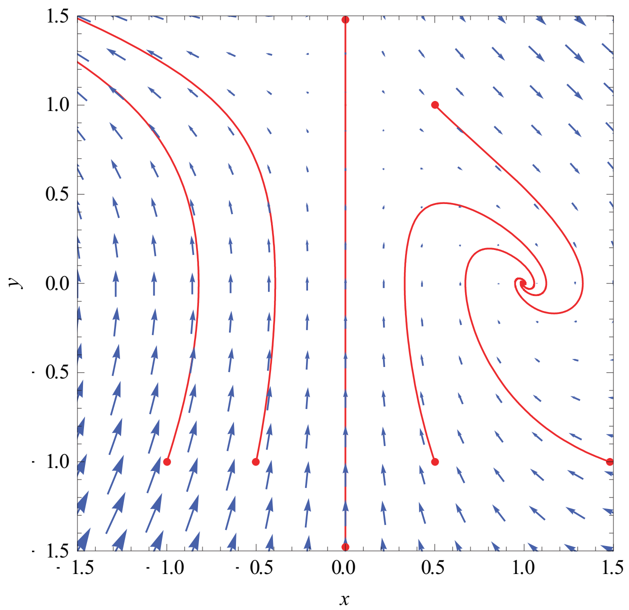


e.

$$\begin{array}{lcl} x \cdot y = 0 & \Rightarrow & \{x \in \mathbb{R}, y = 0\} \; und \; \{x = 0, y \in \mathbb{R}\} \\ 1 - x - y = 0 & \Rightarrow & y = 1 - x \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f.



2. **Solar hot water system**

a. Area between jW(t) and t-axis, multiplied by area:

$$\bar{j}_W \approx 600 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

$$W_{rad} = 600 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 3600\mathrm{J} = 2.6 \cdot 10^8 \mathrm{J}$$

b.

$$\begin{aligned}\Delta W &= C_{Tank} \Delta T \\ &= m_{Tank} c_{water} \left(T_{64,800} - T_{21,600}\right) \\ &= 1000 \cdot 4200 \cdot (59 - 20)\mathrm{J} = 1.63 \cdot 10^8 \mathrm{J}\end{aligned}$$

$$\eta = \frac{1.63 \cdot 10^8}{2.6 \cdot 10^8} = 0.63$$

c.

$$\frac{d}{dt} W_{w,water} = I_{W,abs \to water} + I_{W,conv,in} - I_{W,conv,out}$$

$$\frac{d}{dt} W_{abs} = I_{W,abs} - I_{W,loss} - I_{W,abs \to water}$$

d.

$$\begin{aligned}I_{W,conv,in} - I_{W,conv,out} &= c_{water} I_m \left(T_{in} - T_{out}\right) \\ &= 4200 \cdot 0.111 \cdot (39 - 53)\mathrm{W} = -6.5 \cdot 10^3 \mathrm{W}\end{aligned}$$

e.

$$0 = I_{W,abs \to water} + I_{W,conv,in} - I_{W,conv,out}$$

$$\begin{aligned}I_{W,abs \to water} &= I_{W,conv,out} - I_{W,conv,in} \\ &= 6.5 \cdot 10^3 \mathrm{W}\end{aligned}$$

f.

$$I_{W,abs \to water} = Ah\left(T_{abs} - T_{w,water}\right)$$

$$h = \frac{I_{W,abs \to water}}{A\left(T_{abs} - 0.5\left(T_{w,in} + T_{w,out}\right)\right)} = \frac{6.5 \cdot 10^3}{10 \cdot (65 - 47.5)} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K} \cdot \mathrm{m}^2} = 37 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K} \cdot \mathrm{m}^2}$$

Here we use the average temperature of the water in the collector (47.5°C) at t = 43,200 s.

3. **Radioactive water**

a.

$$\frac{dV}{dt} = -\Pi_V$$

$$\frac{dn}{dt} = -\Pi_n$$

b.

$$\frac{dV}{dt} = -\mathit{\Pi}_V$$
$$V = Ah$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{A}\mathit{\Pi}_V \quad , \quad h(0) = h_0$$

c.

$$\frac{dn}{dt} = -\mathit{\Pi}_n$$
$$\mathit{\Pi}_n = \lambda n$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dn}{dt} = -\lambda n \quad , \quad n(0) = n_0$$

d. Solution for $V(t)$:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{A}\mathit{\Pi}_V \quad , \quad h(0) = h_0$$
$$\int_{h_0}^{h} dh = -\frac{1}{A}\mathit{\Pi}_V \int_0^t dt \quad \Rightarrow$$
$$h - h_0 = -\frac{1}{A}\mathit{\Pi}_V (t-0)$$
$$V(t) = V_0 - \mathit{\Pi}_V t$$

Solution for $n(t)$:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n \quad , \quad n(0) = n_0$$
$$\int_{n_0}^{n} \frac{1}{n} dn = -\lambda \int_0^t dt \quad \Rightarrow$$
$$\ln\left(\frac{n}{n_0}\right) = -\lambda (t-0)$$
$$n(t) = n_0 \exp(-\lambda t)$$

Calculation of concentration:

$$c(t) = \frac{n(t)}{V(t)} = \frac{n_0 \exp(-\lambda t)}{V_0 - \mathit{\Pi}_V t}$$

e. Rate of change of concentration:

$$c(t) = \frac{n_0 \exp(-\lambda t)}{V_0 - \mathit{\Pi}_V t}$$
$$\frac{dc}{dt} = -\lambda \frac{n_0 \exp(-\lambda t)}{V_0 - \mathit{\Pi}_V t} + \frac{-\mathit{\Pi}_V}{-(V_0 - \mathit{\Pi}_V t)^2} n_0 \exp(-\lambda t)$$
$$= \frac{n_0 \exp(-\lambda t)}{V_0 - \mathit{\Pi}_V t}\left[-\lambda + \frac{\mathit{\Pi}_V}{V_0 - \mathit{\Pi}_V t}\right] = c(t)\left[-\lambda + \frac{\mathit{\Pi}_V}{V_0 - \mathit{\Pi}_V t}\right]$$

Therefore, the question if c grows or declines at t = 0 is answered by:

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = c(0)\left[-\lambda + \frac{\Pi_V}{V_0}\right]$$

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} > 0 \quad if \quad -\lambda + \frac{\Pi_V}{V_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Pi_V}{V_0} > \lambda$$

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} < 0 \quad if \quad -\lambda + \frac{\Pi_V}{V_0} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Pi_V}{V_0} < \lambda$$

If the concentration decreases, there is a minimum of $c(t)$ at:

$$\frac{dc}{dt} = c(t)\left[-\lambda + \frac{\Pi_V}{V_0 - \Pi_V t}\right]$$

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

$$t_{\min} = \frac{V_0}{\Pi_V} - \frac{1}{\lambda}$$

f. In addition to the models for the changes of volume and of amount of radiactive substance we need the model for the change of entropy. This leads to one more differential equation for $T(t)$. The equation for radiactive decay remains independent of the other two, but the equation vor $V(t)$ will now depend upon T (because of changed evaporation); and the equation for T will depend upon V since the rate of dissipation happens in a changing volume (change of entropy capacitance because of change of mass of the remaining water).