Natur, Technik, Systeme

Test, Mai 2013

Zweites Semester WI12

Erlaubte Hilfsmittel: Bücher und persönlich verfasste Zusammenfassung. Rechen- und Schreibzeugs.

Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Dauer des Tests: 60 Minuten.

1. Es soll ein Modell für die Zahl in einem Kurs erteilter aber noch ungelöster Aufgaben $U(t)$ erstellt werden. Die Dozentin erteilt mit einer Rate I_A laufend Aufgaben, die Studierenden lösen die Aufgaben mit einer konstanten Rate $I_L = I_{L,0}$. Anfänglich hat es keine Aufgaben im Pool der ungelösten Aufgaben ($U(0) = 0$).

   a. Wie lautet das Bilanzgesetz für $U(t)$? [1 P]

   b. Wie lautet das Anfangswertproblem, wenn Aufgaben mit konstanter Rate $I_A = I_{A,0}$ erteilt werden? Was ist die Lösung des Anfangswertproblems? [1 P]

   c. Die Studierenden lassen die Dozentin immer wissen, wieviele ungelöste Aufgaben im Pool sind. Die Dozentin achtet auf die Differenz D zwischen einer akzeptablen Zahl ungelöster Aufgaben (A = const.) und der tatsächlichen Zahl ungelöster Aufgaben: $D = A - U$. Sie erteilt nun Aufgaben mit einer Rate, die proportional zu dieser Differenz ist (mit Proportionalitätsfaktor k_1). Wie lautet das Anfangswertproblem für $U(t)$? [2 P]

   d. Skizzieren Sie die Lösung für $U(t)$ aus Aufgabe c für $A = 10$, $k_1 = 1$ und $I_{L,0} = 5$. Wieder ist $U(0) = 0$. [2 P]

   e. Im nun folgenden Modell macht die Dozentin die Rate, mit der neue Aufgaben aufgegeben werden, indirekt von D abhängig, und zwar so, dass die Änderungsrate von I_A proportional zu D ist:

   $$\frac{dI_A}{dt} = k_2 D$$

   (das entspricht in der Natur einem induktiven Verhalten). Die anfängliche Rate, mit der Aufgaben aufgegeben werden, ist $I_A(0) = I_{A,0}$. Formulieren Sie das zweidimensionale Anfangswertproblem für $U(t)$ und $I_A(t)$. [2 P]

f. Leiten Sie die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Anfangsbedingungen für das Modell aus e her [2 P]:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + k_2 U = k_2 A \quad , \quad U(0) = U_0 \quad , \quad \left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=0} = U'_0$$

g. ZUSATZ. Wie lautet die Lösung des letzten Modells für $U(t)$ für $k_2 = 1$, $I_{A,0} = 5$, $U_0 = 0$, $A = 10$ und $I_L = 5$? [2 P]

Natural and Technical Systems

Test, May 2013

Second Semester WI12

Allowed tools: **Books and personally written summary**. Calculators and writing materials.

Answers must be explained and must be documented.

Duration of the exam: 60 minutes.

1. Es soll ein Modell für die Zahl in einem Kurs erteilter aber noch ungelöster Aufgaben $U(t)$ erstellt werden. Die Dozentin erteilt mit einer Rate I_A laufend Aufgaben, die Studierenden lösen die Aufgaben mit einer konstanten Rate $I_L = I_{L,0}$. Anfänglich hat es keine Aufgaben im Pool der ungelösten Aufgaben ($U(0) = 0$).
   a. Wie lautet das Bilanzgesetz für $U(t)$? [1 P]
   b. Wie lautet das Anfangswertproblem, wenn Aufgaben mit konstanter Rate $I_A = I_{A,0}$ erteilt werden? Was ist die Lösung des Anfangswertproblems? [1 P]
   c. Die Studierenden lassen die Dozentin immer wissen, wieviele ungelöste Aufgaben im Pool sind. Die Dozentin achtet auf die Differenz D zwischen einer akzeptablen Zahl ungelöster Aufgaben (A = const.) und der tatsächlichen Zahl ungelöster Aufgaben: $D = A - U$. Sie erteilt nun Aufgaben mit einer Rate, die proportional zu dieser Differenz ist (mit Proportionalitätsfaktor k_1). Wie lautet das Anfangswertproblem für $U(t)$? [2 P]
   d. Skizzieren Sie die Lösung für $U(t)$ aus Aufgabe c für $A = 10$, $k_1 = 1$ und $I_{L,0} = 5$. Wieder ist $U(0) = 0$. [2 P]
   e. Im nun folgenden Modell macht die Dozentin die Rate, mit der neue Aufgaben aufgegeben werden, indirekt von D abhängig, und zwar so, dass die Änderungsrate von I_A proportional zu D ist:

$$\frac{dI_A}{dt} = k_2 D$$

   (das entspricht in der Natur einem induktiven Verhalten). Die anfängliche Rate, mit der Aufgaben aufgegeben werden, ist $I_A(0) = I_{A,0}$. Formulieren Sie das zweidimensionale Anfangswertproblem für $U(t)$ und $I_A(t)$. [2 P]

f. Leiten Sie die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Anfangsbedingungen für das Modell aus e her [2 P]:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + k_2U = k_2A \quad , \quad U(0) = U_0 \quad , \quad \left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=0} = U'_0$$

g. ZUSATZ. Wie lautet die Lösung des letzten Modells für $U(t)$ für $k_2 = 1$, $I_{A,0} = 5$, $U_0 = 0$, $A = 10$ und $I_L = 5$? [2 P]

Solution

1.

a.

$$\frac{dU}{dt} = I_A - I_L$$

b.

$$\frac{dU}{dt} = I_{A,0} - I_{L,0} \quad , \quad U(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad U(t) = \left(I_{A,0} - I_{L,0}\right)t$$

c.

$$\frac{dU}{dt} = I_A - I_L \quad , \quad U(0) = U_0$$

$$I_L = I_{L,0}$$

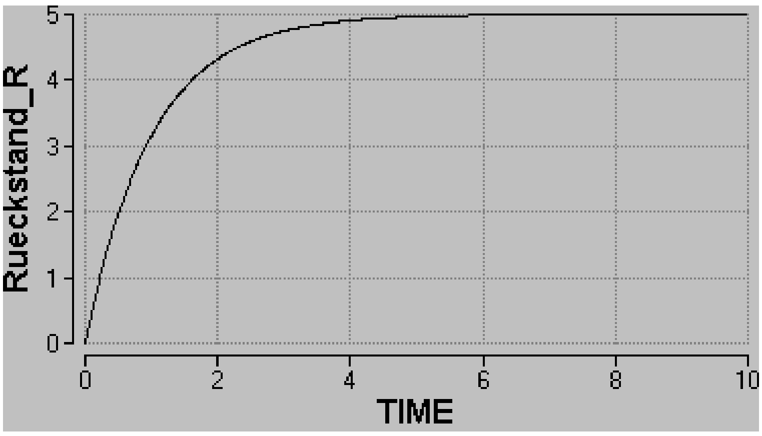
$$D = A - U$$

$$I_A = k_1 D$$

$$\frac{dU}{dt} = k_1(A - U) - I_{L,0}$$

$$\frac{dU}{dt} = -k_1 U + k_1 A - I_{L,0} \quad , \quad U(0) = U_0$$

d.



Initial condition: $U(0) = 0$

Steady state: $\frac{dU}{dt} = 0$: $k_1 U(t = \infty) = k_1 A - I_{L,0}$

$U(t = \infty) = 5$

Time constant: $\tau = \frac{1}{k_1} = 1$

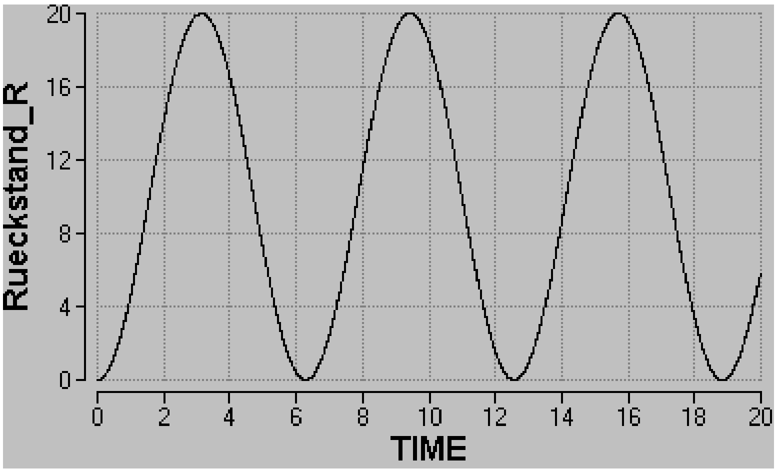
e.

$$\frac{dU}{dt} = I_A - I_L \quad , \quad U(0) = U_0$$
$$I_L = I_{L,0}$$
$$D = A - U$$
$$\frac{dI_A}{dt} = k_2 D \quad , \quad I_A(0) = I_{A,0}$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{dU}{dt} = I_A - I_L \quad , \qquad U(0) = U_0$$
$$\frac{dI_A}{dt} = -k_2 U + k_2 A \quad , \quad I_A(0) = I_{A,0}$$

f.

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{dI_A}{dt} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{d^2U}{dt^2} + k_2 U = k_2 A \quad , \quad U(0) = U_0 \quad , \quad \left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=0} = U'_0$$

g.



$$\textit{Ansatz:} \quad U(t) = -\hat{U}\cos(\omega t) + B$$
$$\frac{dU}{dt} = \omega \hat{U} \sin(\omega t)$$
$$\textit{ICs:} \quad 0 = -\hat{U} + B$$
$$dU/dt\big|_{t=0} = 0$$
$$\frac{d^2U}{dt^2} = \omega^2 \hat{U}\cos(\omega t)$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2 \hat{U}\cos(\omega t) = k_2 A + k_2 \hat{U}\cos(\omega t) - k_2 B$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2 = 1 \quad , \quad B = 10 \quad , \quad \hat{U} = 10$$