Natur, Technik, Systeme

End of Semester Exam, June 2014

Zweites Semester Wirtschaftsingenieurwesen, ZHAW, WI13

Allgemeine Bemerkungen

Dauer der Prüfung: 150 Minuten.

Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Erlaubte Hilfsmittel: **Bücher, Skript und persönlich verfasste Zusammenfassung**. Rechen- und Schreibzeugs.

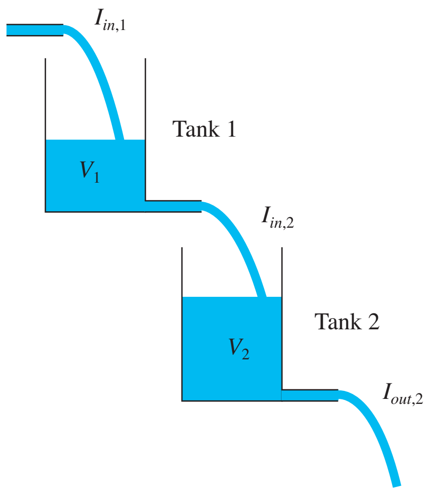
Bitte lösen Sie **jede Aufgabe auf einem separaten Blatt**. Aufgabe 1 muss separat abgegeben werden!

Schreiben Sie jedes Blatt an (Name, Datum, Prüfung, Nummer der Aufgabe).

Geben Sie die Aufgabenblätter mit Ihren Lösungen ab. Schreiben Sie die Aufgabenblätter mit Ihrem Namen an.

Punkteverteilung:
Augabe 1: 13
Augabe 2: 15
Augabe 3: 12

1. Ein System besteht aus zwei zylindrischen Tanks. Tank 1 verfügt über einen Zufluss und einen Abfluss zum Tank 2, Tank 2 über den Zufluss von Tank 1 und einen Abfluss (vgl. Abbildung). Von Interesse sind die Flüssigkeitsvolumen in den beiden Tanks (V_1 und V_2). Nehmen Sie an, dass alle Zu- und Abflüsse *laminar* sind und *keine* Induktivität aufweisen. Die Abflüsse der Tanks lassen sich dann mit der Ratenkonstante μ_i für den Abfluss von Tank i schreiben als



$$I_{out,i} = \mu_i V_i$$

(Hinweis: die Ratenkonstante μ_i hängt mit dem hydraulischen Widerstand R_i durch

$$\mu_i = \rho g / (R_i A)$$

zusammen).

a. Geben Sie das System der Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen an, welches die Dynamik der beiden Volumen beschreibt. Mit anderen Worten: Formulieren Sie das Anfangswertproblem für die beiden Funktionen $V_1(t)$ und $V_2(t)$. Bezeichnen Sie den Zufluss in den Tank 1 mit $I_{in,1}$. Auf der rechten Seite der Differentialgleichungen dürfen nur die Grössen $I_{in,1}$, μ_i und V_i vorkommen. [3 P]

b. Skizzieren Sie ein Diagramm eines dynamischen Modells (BM-Flowchart), mit dem man das Anfangswertproblem, wie es in Aufgabe a hergeleitet wurde, direkt löst. Geben Sie alle relevanten Gleichungen an. [2 P]

c. Skizzieren Sie das Vektorfeld des Systems im Bereich $0 \leq V_1 \leq 2$ dm^3 und $0 \leq V_2 \leq 2$ dm^3. Nehmen Sie folgende Werte für die Parameter an: $\mu_1 = 0.10$ s^{-1}, $\mu_2 = 0.20$ s^{-1} und $I_{in,1} =$ 0.1 dm^3/s. [3 P]

d. Geben Sie das Gleichgewicht des Systems für folgenden Fall an: $\mu_1 = 0.10$ s^{-1}, $\mu_2 = 0.20$ s^{-1} und $I_{in,1} = 0.1$ dm^3/s. [2 P]

e. Ist das Gleichgewicht aus Aufgabe d stabil? Argumentieren Sie aufgrund des Vektorfeldes. [1 P]

f. Überlegen Sie auf der Grundlage des Vektorfelds, wie die Lösungen der Differentialgleichungen aus Aufgabe a für folgende Anfangsbedingungen (mit den Parametern von vorher) aussehen:

   i. $\left[V_1(t=0) = 1\ \text{dm}^3, V_2(t=0) = 0\ \text{dm}^3\right]$

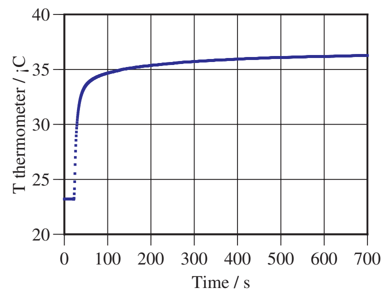
   ii. $\left[V_1(t=0) = 1\ \text{dm}^3, V_2(t=0) = 2\ \text{dm}^3\right]$

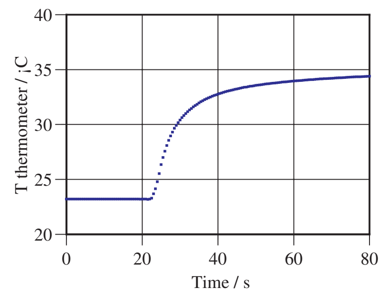
   iii. $\left[V_1(t=0) = 2\ \text{dm}^3, V_2(t=0) = 0\ \text{dm}^3\right]$

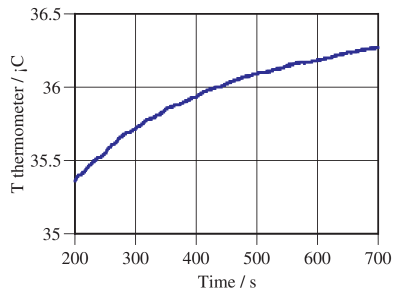
   iv. $\left[V_1(t=0) = 0\ \text{dm}^3, V_2(t=0) = 0.5\ \text{dm}^3\right]$

   Skizzieren Sie die Verläufe der beiden Lösungskurven und für alle vier Anfangswertprobleme (V-t Diagramme). [2 P]

2. Im den Diagrammen rechts sieht man die Daten der Temperatur eines Thermometers (stainless steel temperature probe von Vernier), das unter den Arm geklemmt wurde, um die Körpertemperatur zu messen. Oben ist der ganze Versuch gezeigt, in der Mitte der Anfang der Messung und unten die letzten 500 s. Das zweite und dritte Diagramm sind in Vergrösserung auf einem Beiblatt zu sehen.



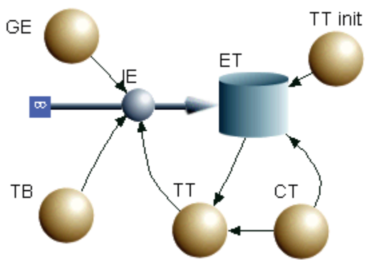




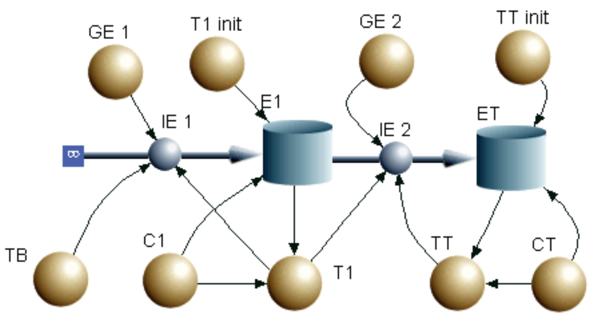
a. Schätzten Sie sie Körpertemperatur (Temperatur in der Achselhöhle) so genau wie möglich ab. [1 P]

b. Der Verlauf der Temperatur des Thermometers deutet darauf hin, dass die Kurve aus (mindestens) zwei Exponentialfunktionen mit verschiedenen Zeitkonstanten zusammengesetzt sein muss. Bestimmen Sie aus den Daten diese beiden Zeitkonstanten. Erklären Sie in den Diagrammen, wie Sie das machen. [Sie sollten etwa 10 s und 250 s erhalten.] [2 P]

c. Warum ist es nicht möglich, den Temperaturverlauf des Thermometers mit einem Modell mit einem *einzigen RC*-Element (wie im Diagramm unten) nachzubilden? (TT soll die Temperatur des Thermometers sein.) [1 P]



Unten sieht man das Diagramm eines dynamischen Modells (BM Flowchart), mit dem man das Experiment brauchbar nachbilden kann. Es wird mit Hilfe der Energie und der Energiebilanz ausgedrückt. ET steht für die Energie des Thermometers, E1 für die Energie einer Hautschicht nahe am Thermometer. Energie wird durch Wärmetransport aus dem Inneren des Körpers nachgeliefert (IE_1), wo die Temperatur konstant TB beträgt.



d. Erklären Sie mit Worten, wie in diesem Modell die schnelle und die langsame Phase des Thermometer-Verhaltens (siehe Daten) zustande kommen. Erklären Sie dabei auch, welche Werte Sie für TB, T1_init und TT_init verwenden. [2 P]

e. Die Energiekapazität des Thermometers (CT) wurde in einem anderen Experiment zu 0.72 J/K geschätzt. Wie gross müssen Sie GE_2 machen, damit Sie die erste schnelle Aufwärmphase des Thermometers richtig wiedergeben können? [2 P]

f. Wie gross müssen Sie GE_1 machen, damit Sie auch die zweite langsame Phase des Thermometers nachbilden können? [Hinweis: Für diese Abschätzung nehmen Sie die Hautschicht nahe am Thermometer nicht mehr als separaten Speicher, sondern fassen sie mit dem Thermometer zu einem Körper zusammen; nehmen sie eine Energiekapazität für die Hautschicht, die 5 mal grösser als die des Thermometers ist. Sie haben dann ein Modell mit nur einem Speicher und zwei Widerständen in Serie.] [4 P]

g. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für $T_T(t)$ und $T_1(t)$ (Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen), das dem Modell mit den beiden Speichern entspricht. [3 P]

3. Formulieren und analysieren Sie folgendes Modell der Bewirtschaftung Ihres Kühlschranks (Flowchart Diagramm auf der nächsten Seite). In Ihrem Kühlschrank hat es eine (variable) Menge Lebensmittel (F). Der Einkauf läuft nach folgendem Muster: Sie kaufen Lebensmittel mit einer Rate, die die Summe einer fixen (I_{Fb}) und einer variablen Rate (I_{Fv}) ist:

$$I_{F,total} = I_{Fb} + I_{Fv}$$

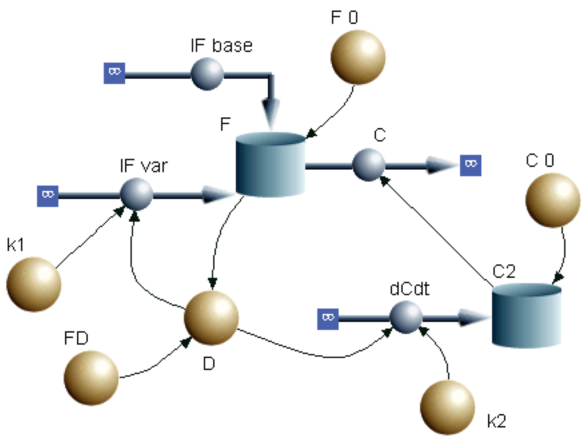
Die variable Einkaufrate (I_{Fv}) wird durch die Differenz zwischen tatsächlichem Kühlschrankinhalt (F) und gewünschtem Inhalt (F_D) gesteuert:

$$D = F - F_D$$
$$I_{Fv} = -k_1 D$$

Die variable Einkaufrate ist also proportional zu dieser Differenz (I_{Fv} kann und darf auch negative Werte annehmen, nur $I_{F,tot}$ soll positiv bleiben).

Der Verzehr der Lebensmitten (C) wird indirekt durch diese Differenz gesteuert. Man ändert seine Essgewohnheit in Abhängigkeit von D, d.h. die Änderungsrate des Verzehrs soll proportional zur Differenz D sein (mit einer Ratenkonstanten k_2); man beginnt mehr zu essen, wenn D positiv ist.

Die Anfangswerte von $F(t)$ und $C(t)$ seinen F_0 und C_0.



a. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für $F(t)$ und $C(t)$ in Form von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit ihren zugehörigen Anfangsbedingungen. [3 P]

b. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für $C(t)$ als Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Anfangsbedingungen für $C(0)$ und dC/dt bei $t = 0$. [3 P] Sie sollten die folgende Gleichung erhalten:

$$\frac{d^2C}{dt^2} + k_1 \frac{dC}{dt} + k_2 C = k_2 I_{FB}$$

$$C(0) = C_0$$

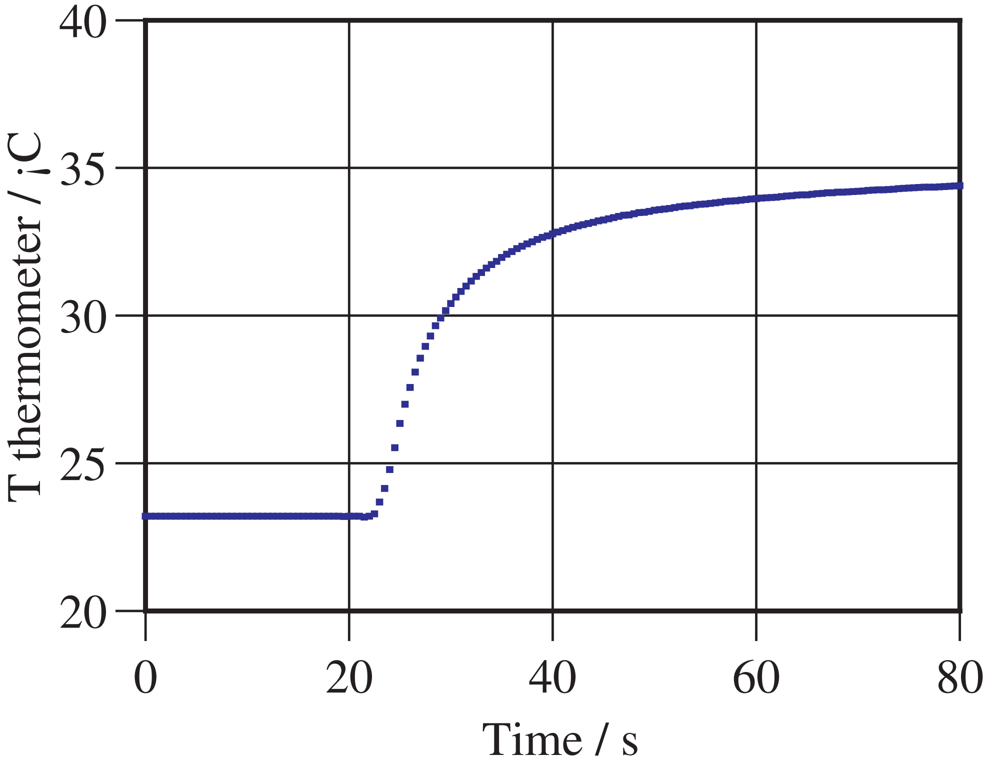
$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_{t=0} = k_2\left(F_0 - F_D\right)$$

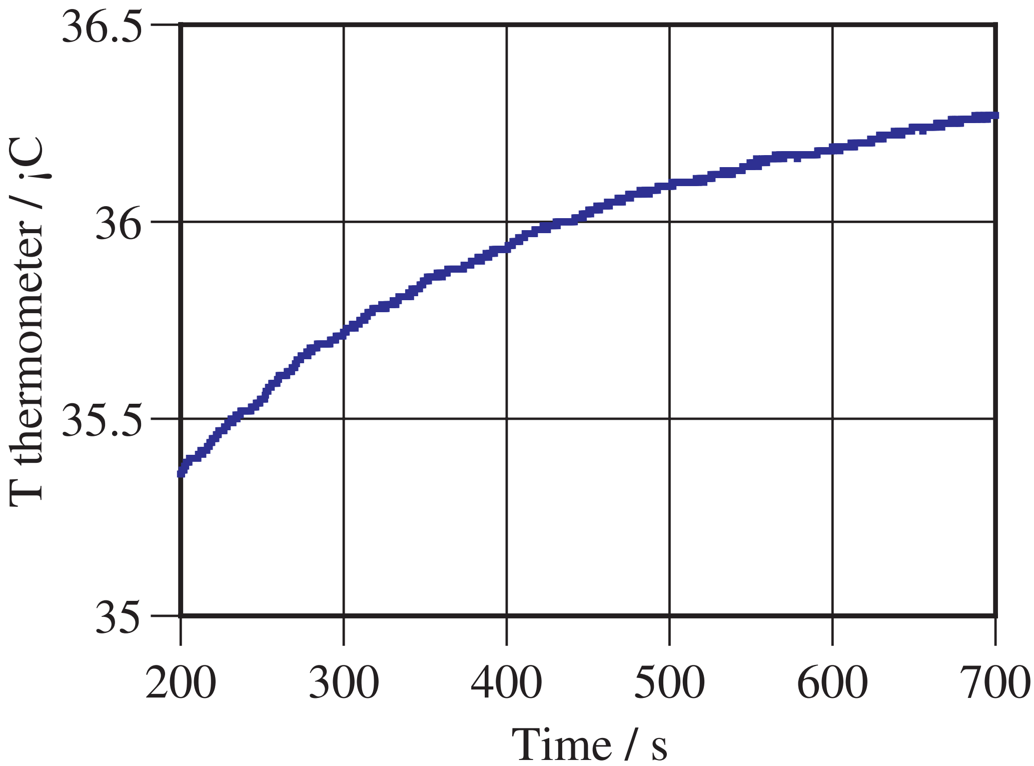
c. Welchen Wert muss man welchem Faktor geben, damit die Schwingung, die sich hier ergibt, ungedämpft ist? [1 P]

d. Im allgemeinen (gedämpften) Fall: Was sind die Gleichgewichtswerte für F und C? Welcher Parameter des Modells steuert den Gleichgewichtswert der Menge der Lebensmittel im Kühlschrank? Welcher Parameter steuert die Menge, die man pro Zeiteinheit isst (Verzehr)? [3 P]

e. Welche Einheiten haben k_1 und k_2? [1 P]

f. Bestimmen Sie die Periode der Schwingung für den ungedämpften Fall. [1 P]


40
35
30
25
20
0
20
40
60
80
Time / s
T thermometer / ¡C


36.5
36
35.5
35
200
300
400
500
600
700
Time / s
T thermometer / ¡C

Natural and Technical Systems

End of Semester Exam, June 2014

Second Semester Wirtschaftsingenieurwesen, ZHAW, WI13

General Remarks

Duration of the exam: 150 minutes.

Answers must be explained and must be documented.

Allowed tools: **Books, lecture notes, and personally written summary**. Calculators and writing materials.

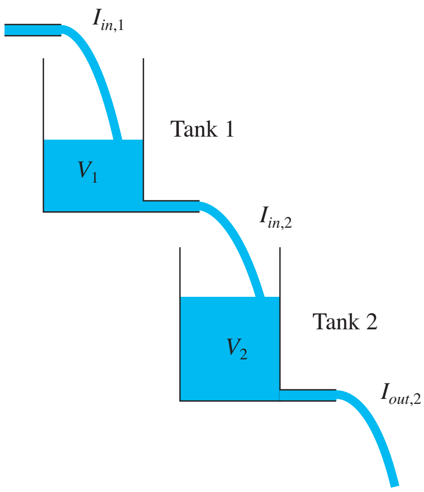
Please solve **every problem on a separate sheet**. Problem 1 must be handed in separately!

Write your name, date, exam, and number of problem on **every sheet**.

Hand in the problem statements with your solutions. Write your name on the problem statements!

Points:
Problem 1: 13
Problem 2: 15
Problem 3: 12

1. A system consists of two cylindrical tanks. Tank 1 has an inflow and an outflow to Tank 2; Tank 2 has the inflow from Tank 1 and an outflow (see figure on the right). Consider the volumes of liquid in the two tanks (V_1 and V_2). Assume that all flows are *laminar* and *not* subject to induction. An outflows of a tank can therefore be modeled as follows with the help of the rate constant μ_i of Tank i:



$$I_{out,i} = \mu_i V_i$$

Hint: a rate constant μ_i depends upon the hydraulic resistance R_i as follows:

$$\mu_i = \rho g / \left(R_i A\right)$$

a. Formulate the initial value problem (differential equations and initial conditions) for the functions $V_1(t)$ and $V_2(t)$ according to this model. Use the symbol $I_{in,1}$ for the inflow to Tank 1. On the right hand side of the differential equations, only $I_{in,1}$, μ_i and V_i may be used. [3 P]

b. Sketch the diagram of a dynamical model (BM flowchart) that solves the initial values problem formulated in a directly. List all relevant equations. [2 P]

c. Sketch the vector field of the system in the range $0 \le V_1 \le 2$ dm^3 and $0 \le V_2 \le 2$ dm^3. Assume the following values of parameters: $\mu_1 = 0.10$ s^{-1}, $\mu_2 = 0.20$ s^{-1} and $I_{in,1} = 0.1$ dm^3/s. [3 P]

d. Determine the equilibrium point for the following case: $\mu_1 = 0.10$ s^{-1}, $\mu_2 = 0.20$ s^{-1} and $I_{in,1} = 0.1$ dm^3/s. [2 P]

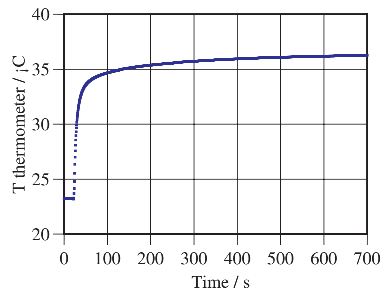
e. Is the equilirbrium found in problem d stable? Use arguments based upon the form of the vector field. [1 P]

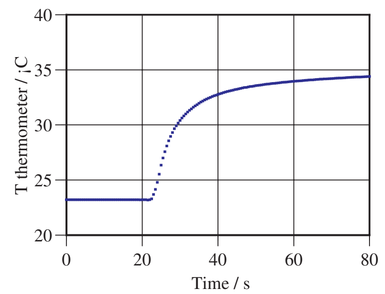
f. Use the vector field to find the solutions of the differential equations of problem a for the following initial conditions (and the same values of parameters as above):

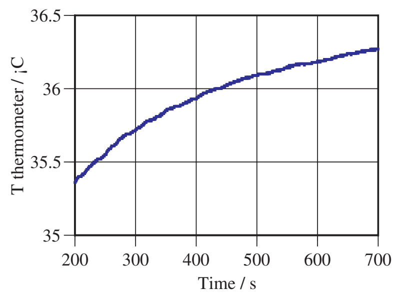
i.	$\left[V_1(t=0) = 1\text{ dm}^3, V_2(t=0) = 0\text{ dm}^3\right]$
ii.	$\left[V_1(t=0) = 1\text{ dm}^3, V_2(t=0) = 2\text{ dm}^3\right]$
iii.	$\left[V_1(t=0) = 2\text{ dm}^3, V_2(t=0) = 0\text{ dm}^3\right]$
iv.	$\left[V_1(t=0) = 0\text{ dm}^3, V_2(t=0) = 0.5\text{ dm}^3\right]$

Sketch the solutions curves for all four initial conditions in *V*-*t* diagrams. [2 P]

2. In the diagrams on the right we see the temperature of a thermometer (Vernier stainless steel temperatur probe) that was put in the armpit to measure body temperature. At the top we see the entire time series. In the diagram in the middle, the beginning of the data is shown. In the last diagram we see the last 500 s of data. The second and third diagrams are enlarged on an extra page.



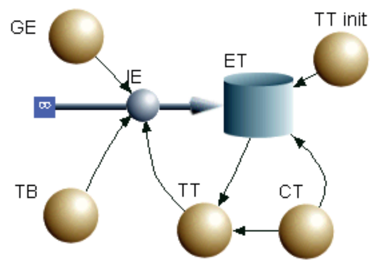




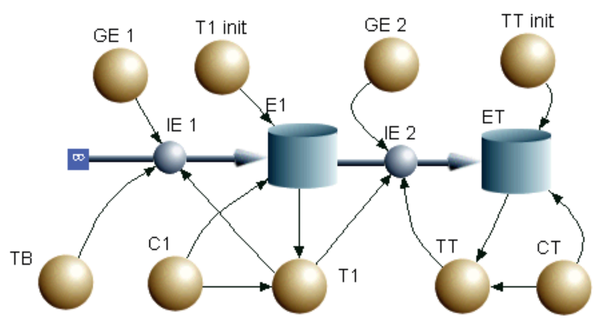
a. Estimate as carefully as possible the body temperature (temperature in the armpit). [1 P]

b. The form of the time series indicates that it consists of (at least) two exponential functions having different time constants. Use the data to determine these two time constants. Use the diagrams to explain how you do this. [You should obtain about 10 s and 250 s.] [2 P]

c. Why is it impossible to reproduce the measured temperature with a model consisting of a *single RC*-element (as shown in the diagram below)? (TT represents the temperature of the thermometer.) [1 P]



Below you see the diagram (BM Flowchart) of a dynamical model that can be used to represent the experiment. It is expressed in terms of energy and energy balances. ET represents the energy of the thermometer, E1 stands for the energy of a layer of skin near the thermometer. Energy flows toward the thermometer from the depths of the body (IE_1) where the temperature is a constant TB.



d. Explain in words (and diagrams if necessary) how the fast and the slow phases of the behavior of the thermometer (see the data of the experiment) arise in this model. Explain as well what values you will use for TB, T1_init, and TT_init. [2 P]

e. In another experiment, the energy capacitance of the thermometer (CT) was estimated to be 0.72 J/K. What value should you use for GE_2 in order to model the fast initial phase of warming of the thermometer? [2 P]

f. What value should you use for GE_1 in order to obtain the second slow phase as well? [Hint: For this estimate, you do not use the layer of skin next to the thermometer as a separate storage element any longer; you combine it with the thermometer to form a single storage element. Use a value of energy capacitance for the layer of skin 5 times as large as the capacitance of the thermometer. Now you have a model with a single storage element and two resistors in series.] [4 P]

g. Formulate the initial value problem for $T_T(t)$ and $T_1(t)$ (differential equations and initial conditions) that corrsponds to the model shown above. [3 P]

3. Formulate and analyze the following model for managing the contents of your refrigerator (see the flow chart diagram on the following page). In the refrigerator, there is a (variable) amount of food (F). Shopping for food works as follows: you buy food at a rate that is the sum of a fixed value (I_{Fb}) and a variable rate (I_{Fv}):

$$I_{F,total} = I_{Fb} + I_{Fv}$$

The variable shopping rate (I_{Fv}) is controlled by the difference between actual amount of food in the refrigerator (F) and a desired amount (F_D):

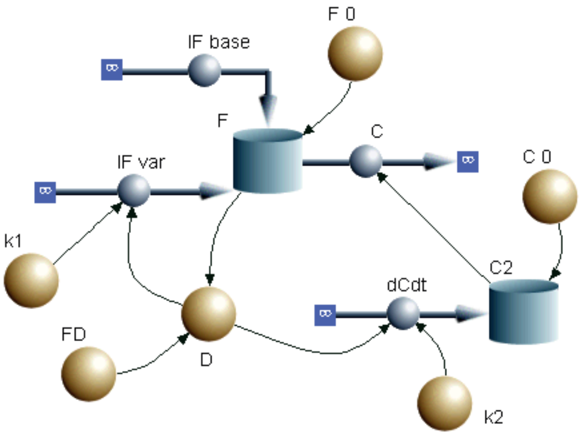
$$D = F - F_D$$
$$I_{Fv} = -k_1 D$$

This variable shopping rate is proportional to this difference (I_{Fv} may take negative values, only $I_{F,tot}$ needs to be positive).

The consumption of food (C) is controlled indirectly by this difference. Eating habits are changed depending upon D as follows: the rate of change of consumption is made proportional to the difference D (with a rate constant k_2); you begin to eat more if D is positiv .

The initial values of $F(t)$ and $C(t)$ are assumed to be F_0 und C_0.

a. Formulate the initial value problem for $F(t)$ and $C(t)$ in form of two differential equations of first order together with their initial conditions. [3 P]



b. Formulate the initial value problem for $C(t)$ as a single differential equation of second order with its two initial conditions for $C(0)$ snd dC/dt at$t$ = 0. [3 P] You should obtain the following result:

$$\frac{d^2C}{dt^2} + k_1 \frac{dC}{dt} + k_2 C = k_2 I_{FB}$$

$$C(0) = C_0$$

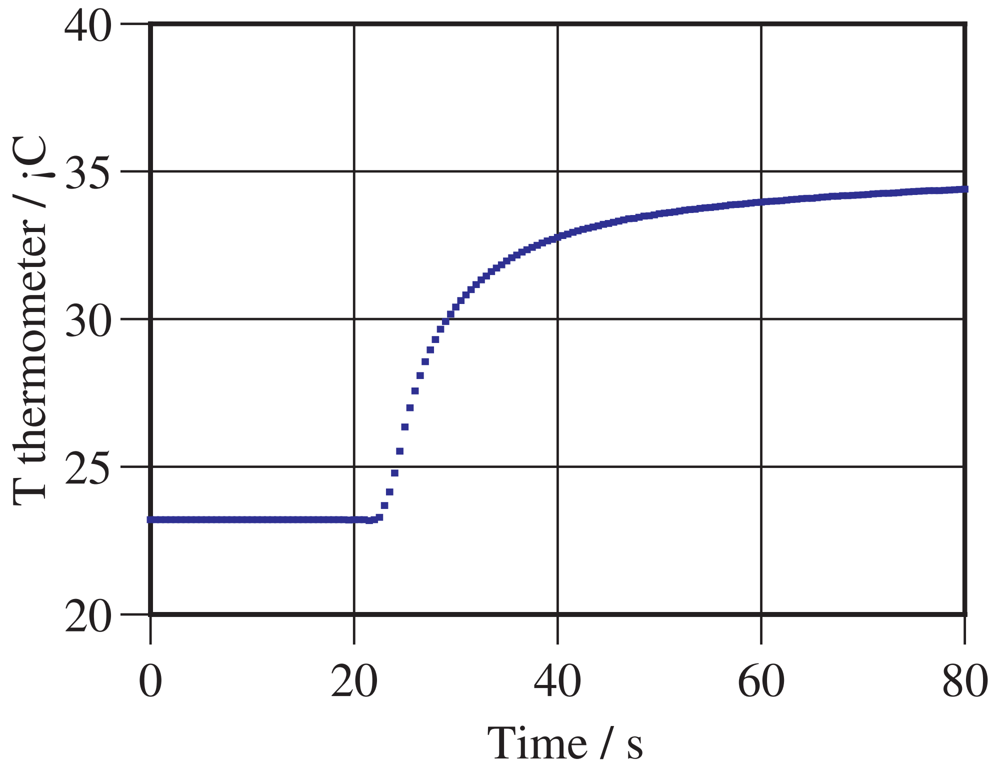
$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_{t=0} = k_2\left(F_0 - F_D\right)$$

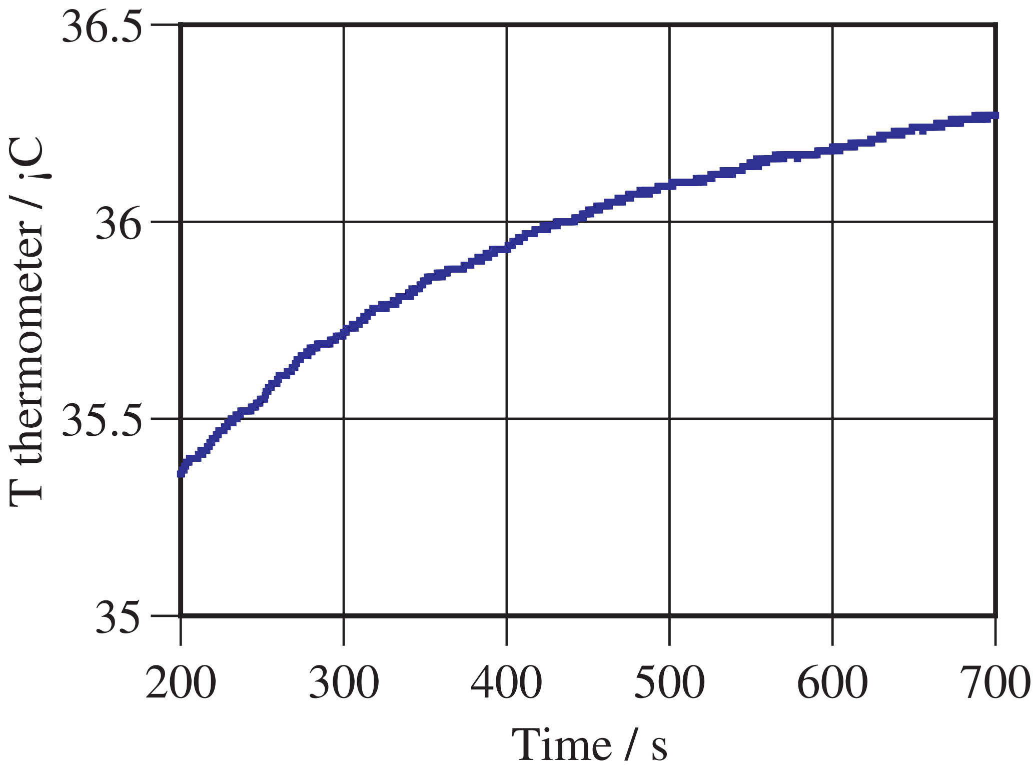
c. Which value has to be used for which factor to make the oscillation undamped? [1 P]

d. Consider the general (damped) case: What are the equilibrium values for F and C? Which parameter controls the equilibrium value of amount of food in the refrigerator? Which parameter controls the (equilibrium) rateof eating (consumption)? [3 P]

e. What are the units of k_1 and k_2? [1 P]

f. Determine the period of oscillation for the undamped case. [1 P]


40
35
30
25
20
T thermometer / ¡C
0
20
40
60
80
Time / s


36.5
36
35.5
35
T thermometer / ¡C
200
300
400
500
600
700
Time / s

Solutions

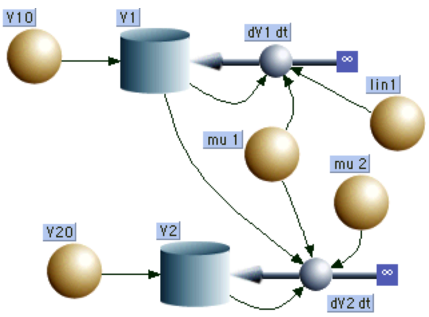
1. **Dynamical system**

a.

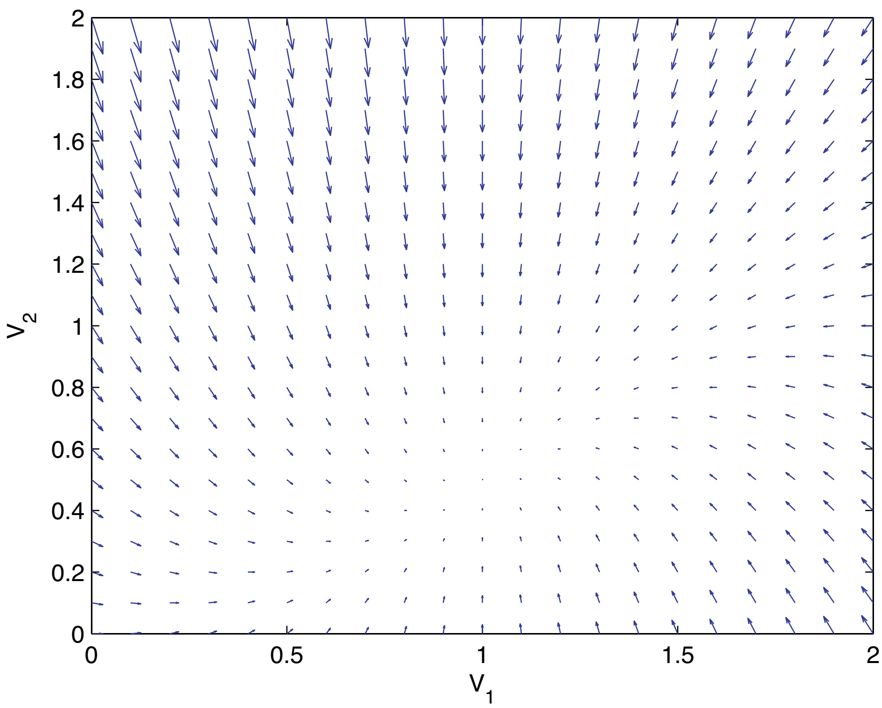
$$\frac{dV_1}{dt} = I_{in,1} - \mu_1 V_1 \quad , \quad V_1(0) = V_{1,0}$$
$$\frac{dV_2}{dt} = \mu_1 V_2 - \mu_1 V_2 \quad , \quad V_2(0) = V_{2,0}$$

b.

d/dt (V1) = + dV1_dt
INIT V1 = V10
d/dt (V2) = + dV2_dt
INIT V2 = V20
dV1_dt = Iin1-mu_1*V1
dV2_dt = mu_1*V1-mu_2*V2
V10 = 1
V20 = 0
mu_1 = 0.10
mu_2 = 0.2
Iin1 = 0.10



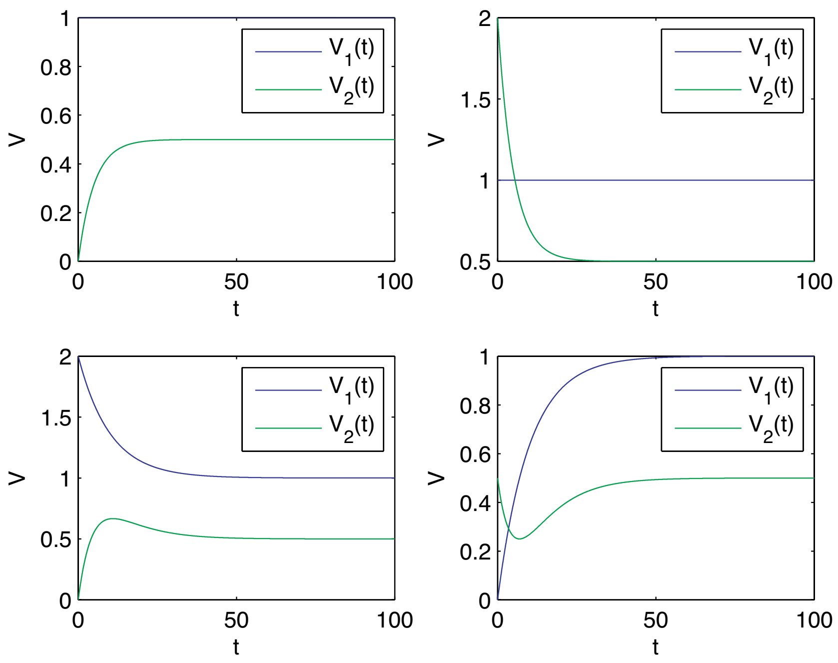
c.



d. V1(equ) = 1, V2(equ) = 0.5.

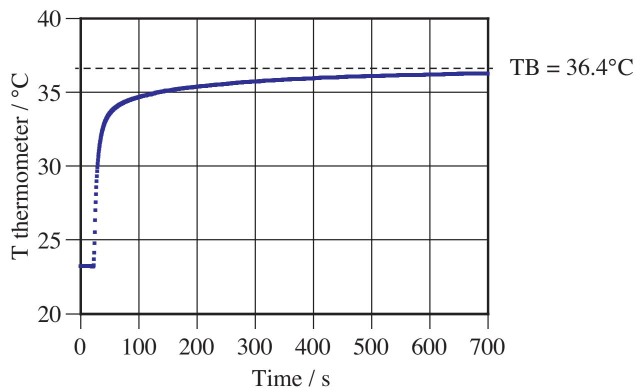
e. Stable. Local convergence of the vector field.

f.

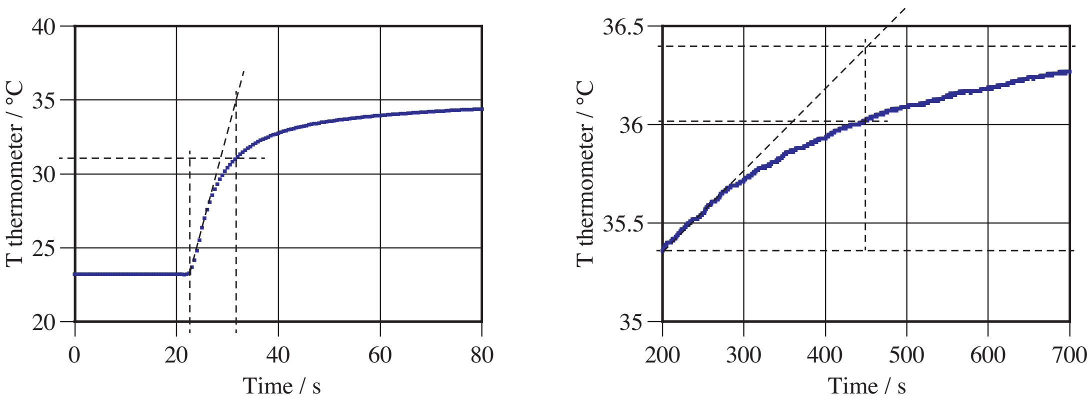


2. **Thermometer in armpit**

a. Estimated body temperature:



b. Estimation of two time constants (use 37% or 63%-rule for exponential functions):



c. A single *RC*-element has only a single time constant.

d. If we use TB = 36.4°C, T1_init = 36.4°C (or a tiny bit lower), and TT_init = 23°C, the temperature of the thermometer can rise fast because of contact with the outermost layer of skin (at temperature T1_init) if CT is small and GE_2 is (relatively) high. Now the thermometer cools this layer of skin, its temperature nears that of the rising TT. After this phase, heat flows from deeper layers of the flesh (at constant TB) through the skin (which now acts as an additional resistor) into the themometer. If GE_1 is low and/or C1 large, the response of thermometer PLUS skin will be slow.

e.

$$\tau_1 = \frac{1}{G_{E2}} C_T \quad \Rightarrow \quad G_{E2} = \frac{1}{\tau_1} C_T = \frac{0.72}{10} \frac{\text{W}}{\text{K}} = 0.072 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

f. Combine capacitances and resistances and equate the product of R_tot and C_tot to the second time constant:

$$\begin{aligned}
C_{tot} &= C_1 + C_T = 5C_T + C_T \\
R_{tot} &= R_{E1} + R_{E2} = \frac{1}{G_{E1}} + \frac{1}{G_{E2}} \\
\tau_2 &= R_{tot} C_{tot} \\
&= \left(\frac{1}{G_{E1}} + \frac{1}{G_{E2}} \right) \cdot 6C_T \\
\frac{1}{G_{E1}} &= \frac{\tau_2}{6C_T} - \frac{1}{G_{E2}} = \frac{250}{6 \cdot 0.72} \frac{\text{K}}{\text{W}} - \frac{1}{0.072} \frac{\text{K}}{\text{W}} \\
G_{E1} &= 0.023 \frac{\text{W}}{\text{K}}
\end{aligned}$$

g.

$$\frac{dE_1}{dt} = I_{E1} - I_{E2} \quad , \quad E_1(0) = C_1 T_{1,init}$$
$$\frac{dE_T}{dt} = I_{E2} \quad , \quad E_T(0) = C_T T_{T,init}$$
$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = G_{E1}(T_B - T_1) - G_{E2}(T_1 - T_T)$$
$$C_T \frac{dT_T}{dt} = G_{E2}(T_1 - T_T)$$
$$\frac{dT_1}{dt} = -\left(\frac{G_{E1}}{C_1} + \frac{G_{E2}}{C_1}\right) T_1 + \frac{G_{E2}}{C_1} T_T + \frac{G_{E1}}{C_1} T_B \quad , \quad T_1(0) = T_{1,init}$$
$$\frac{dT_T}{dt} = \frac{G_{E2}}{C_T}(T_1 - T_T) = \frac{G_{E2}}{C_T} T_1 - \frac{G_{E2}}{C_T} T_T \quad , \quad T_T(0) = T_{T,init}$$

3. **Managing your refrigerator**

a.

$$\frac{dF}{dt} = I_{Fb} + I_{Fv} - C \quad , \quad F(0) = F_0$$
$$D = F - F_D$$
$$I_{Fv} = -k_1 D$$
$$\frac{dC}{dt} = -k_2 D \quad , \quad C(0) = C_0$$

$$\frac{dF}{dt} = -k_1 F - C + I_{Fb} + k_1 F_D \quad , \quad F(0) = F_0$$
$$\frac{dC}{dt} = k_2 F - k_2 F_D \quad , \quad C(0) = C_0$$

b.

$$\frac{dF}{dt} = -k_1 F - C + I_{Fb} + k_1 F_D \quad , \quad F(0) = F_0$$
$$\frac{dC}{dt} = k_2 F - k_2 F_D \quad , \quad C(0) = C_0$$
$$\frac{d^2C}{dt^2} = k_2 \frac{dF}{dt} = -k_2 k_1 F - k_2 C + k_2 I_{Fb} + k_2 k_1 F_D$$
$$F = \frac{1}{k_2}\left(\frac{dC}{dt} + k_2 F_D\right)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2C}{dt^2} = k_2 \frac{dF}{dt} = -k_2 k_1 \frac{1}{k_2}\left(\frac{dC}{dt} + k_2 F_D\right) - k_2 C + k_2 I_{Fb} + k_2 k_1 F_D$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2C}{dt^2} + k_1 \frac{dC}{dt} + k_2 C = k_2 I_{Fb}$$
$$IC: \quad C(0) = C_0 \quad , \quad \left.\frac{dC}{dt}\right|_{t=0} = k_2 F(0) - k_2 F_D = k_2(F_0 - F_D)$$

c. Oscillation will be undamped if k1 = 0.

d.

$$
\begin{aligned}
&0 = -k_1 F^{eq} - C^{eq} + I_{Fb} + k_1 F_D \\
&0 = k_2 F^{eq} - k_2 F_D \\
&\Rightarrow \\
&F^{eq} = F_D \\
&C^{eq} = I_{Fb}
\end{aligned}
$$

The desired amount of food FD determines the equilibrium value for F. The base shopping rate IFB determines the consumption rate C in equilibrium.

e. [k1] = s^{-1}, [k2] = s^{-2}.

f.

$$\Omega^2 = k_2 \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k_2}}$$