NTS2: Natur, Technik, Systeme

Test 2, Mai 2015

Zweites Semester WI14

Erlaubte Hilfsmittel: **Bücher, persönlich verfasstes Journal und Zusammenfassung**. Rechen- und Schreibzeugs.

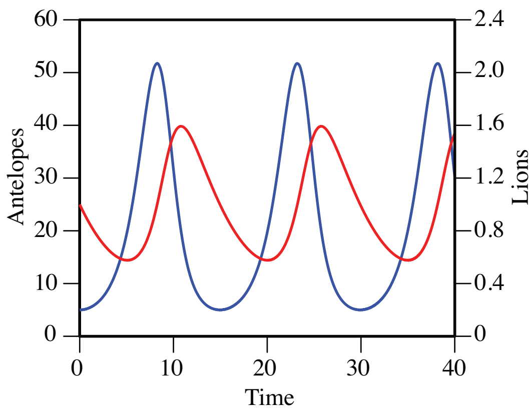
Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Dauer der Prüfung: 60 Minuten.

Räuber-Beute Modell von Lotka und Volterra

Es gibt ein berühmtes Modell der Wechselwirkung von Räuber- und Beutepopulationen von Lotka und Volterra. Wir denken uns eine Räuberpopulation von Löwen (L, Anzahl n_L) und eine Beutepopulation von Antilopen (A, Anzahl n_A). Die Tiere jeder Population werden geboren und sterben.

Nehmen Sie bei der Formulierung des Modells folgende Symbole für die Geburten- und Sterberaten: Geburtenrate Antilopen: $\Pi_{nA,B}$, Sterberate Antilopen: $\Pi_{nA,D}$; Geburtenrate Löwen: $\Pi_{nL,B}$, Sterberate Löwen: $\Pi_{nL,D}$. Die Wechselwirkung führt zu schwingendem Verhalten der Populationen. Beispiel:



a. Formulieren Sie die Bilanzgleichungen für Antilopen und Löwen in momentaner Form. [1 P.]

Lotka und Volterra postulierten folgende Formen für die Geburten- und Todesraten der Tiere. (a) Geburtenrate der Antilopen proportional zur Zahl der Antilopen, mit Proportionalitätsfaktor a; (b) Sterberate der Antilopen proportional zur Zahl der Antilopen und der Löwen, mit Proportionalitätsfaktor b; (c) Geburtenrate der Löwen proportional zur Zahl der Löwen und der Antilopen, mit Proportionalitätsfaktor c; (d) Sterberate der Löwen proportional zur Zahl der Löwen, mit Proportionalitätsfaktor d.

b. Formulieren Sie die konstitutiven Beziehungen für die Geburten- und Sterberaten und zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem für die beiden Populationen auf folgende Form führt: [2 P.]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_\mathrm{A} &= a n_\mathrm{A} - b n_\mathrm{L} n_\mathrm{A} \qquad & n_\mathrm{A}(0) &= n_{\mathrm{A},0} \\ \frac{d}{dt} n_L &= c n_\mathrm{A} n_\mathrm{L} - d n_\mathrm{L} \qquad & n_\mathrm{L}(0) &= n_{\mathrm{L},0} \end{aligned}$$

Nehmen Sie im Folgenden diese Werte für die Parameter: $a = 1$, $b = 1$, $c = 0.01$, $d = 0.2$.

c. Für das Modell gibt es ein Gleichgewicht für bestimmte Werte n_A^* und n_L^*. Beweisen Sie, dass $n_\mathrm{A}^* = 20$ und $n_\mathrm{L}^* = 1$. [2 P.]

Das Anfangswertproblem ist nicht-linear, deshalb kann man es nicht in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung verwandeln. Wenn man aber das Modell mit Anfangswerten nahe den Gleichgewichtwerten startet, kriegt man ein lineares Modell für die Abweichungen Δn_A und Δn_L von den Gleichgewichtswerten n_A^* und n_L^* (Δn_A und Δn_L sind nun die neuen Variablen):

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \Delta n_\mathrm{A} \\ \frac{d}{dt} \Delta n_\mathrm{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b n_\mathrm{L}^* & -b n_\mathrm{A}^* \\ c n_\mathrm{L}^* & c n_\mathrm{A}^* - d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta n_\mathrm{A} \\ \Delta n_\mathrm{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(a - b n_\mathrm{L}^*\right) n_\mathrm{A}^* \\ \left(c n_\mathrm{A}^* - d\right) n_\mathrm{L}^* \end{bmatrix}$$

d. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem mit den angegebenen Werten für a, b, c, d folgendermassen geschrieben werden kann: [1 P.]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta n_\mathrm{A} &= -20 \Delta n_\mathrm{L} \\ \frac{d}{dt} \Delta n_\mathrm{L} &= 0.01 \Delta n_\mathrm{A} \end{aligned}$$

e. Wandeln Sie die beiden Differentialgleichungen in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung um. [2 P.]

f. Berechnen Sie die Schwingungsperiode dieses Systems. Vergleichen Sie den Wert mit der Schwingungsperiode im oben gezeigten Diagramm. [2 P.]

NTS2: Natural and Technical Systems

Test 2, May 2015

Second Semester WI14

Allowed tools: **Books. Personally written journal and summary**. Calculators and writing materials.

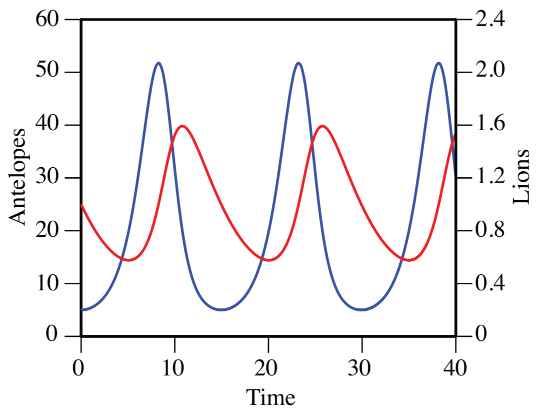
Answers must be explained and must be documented.

Duration of the exam: 60 minutes.

Predator-prey model (Lotka and Volterra)

A famous model of the interaction between predator and prey populations is the one that carries the names of Lotka and Volterra. Imagine a population of predators (lions L, number of individuals: n_L) and a population of prey (antelopes A, number of individuals: n_A). The animals of each of the populations are born and die.

Use the following symbols for birth rates and death rates when formulating the model: birth rate of antelopes: $\Pi_{nA,B}$, death rate of antelopes: $\Pi_{nA,D}$; birth rate of lions: $\Pi_{nL,B}$, death rate of lions: $\Pi_{nL,D}$. The interaction of the populations leads to oscillatory behavior. Here is an example:



a. Formulate the laws of balance for antelopes and lions in instantaneous form. [1 P.]

Lotka and Volterra postulated the following forms of birth rates and death rates of the animals. (a) The birth rate of antelopes is proportional to the number of antelopes, with a factor of proportionality a; (b) the death rate of antelopes is proportional to the number of antelopes and the number of lions, with a factor of proportionality b; (c) the birth rate of lions is proportional to the number of lions and the number of antelopes, with a factor of proportionality c; (d) the death rate of lions is proportional to the number of lions, with a factor of proportionality d.

b. Formulate the constitutive relations for birth rates and death rates and show that the initial value problem for the populations leads to: [2 P.]

$$\frac{d}{dt}n_{\mathrm{A}} = an_{\mathrm{A}} - bn_{\mathrm{L}}n_{\mathrm{A}} \qquad n_{\mathrm{A}}(0) = n_{\mathrm{A},0}$$
$$\frac{d}{dt}n_{L} = cn_{\mathrm{A}}n_{\mathrm{L}} - dn_{\mathrm{L}} \qquad n_{\mathrm{L}}(0) = n_{\mathrm{L},0}$$

In the following, use these values for the parameters: $a = 1$, $b = 1$, $c = 0.01$, $d = 0.2$.

c. There is an equilibrium point for this model, $n_{\mathrm{A}}*$ and $n_{\mathrm{L}}*$. Prove that $n_{\mathrm{A}}* = 20$ and $n_{\mathrm{L}}* = 1$. [2 P.]

The initial value problem is non-linear. Therefore, we cannot transform it to a second order differential equation. However, if we start the model with initial values near the equalibrium point, we can formulate equations for (small) deviations Δn_{A} and Δn_{L} from the equilibrium values $n_{\mathrm{A}}*$ and $n_{\mathrm{L}}*$. This model is linear (with new variables Δn_{A} and Δn_{L}):

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\Delta n_{\mathrm{A}} \\ \frac{d}{dt}\Delta n_{\mathrm{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bn_{\mathrm{L}}^{*} & -bn_{\mathrm{A}}^{*} \\ cn_{\mathrm{L}}^{*} & cn_{\mathrm{A}}^{*} - d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta n_{\mathrm{A}} \\ \Delta n_{\mathrm{L}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(a - bn_{\mathrm{L}}^{*}\right)n_{\mathrm{A}}^{*} \\ \left(cn_{\mathrm{A}}^{*} - d\right)n_{\mathrm{L}}^{*} \end{bmatrix}$$

d. Show that the initial value problem can be written as follows (for the values of paramters a, b, c, d given above): [1 P.]

$$\frac{d}{dt}\Delta n_{\mathrm{A}} = -20\Delta n_{\mathrm{L}}$$
$$\frac{d}{dt}\Delta n_{\mathrm{L}} = 0.01\Delta n_{\mathrm{A}}$$

e. Transform the system of two differential equations into a differential equation of second order. [2 P.]

f. Determine the period of oscillation of this system. Compare the result to the period of osciallation that can be measured in the diagram above. [2 P.]