NTS2: Natur, Technik, Systeme

Test 2, Mai 2015

Zweites Semester WI13t

Erlaubte Hilfsmittel: **Bücher, persönlich verfasstes Journal und Zusammenfassung**. Rechen- und Schreibzeugs.

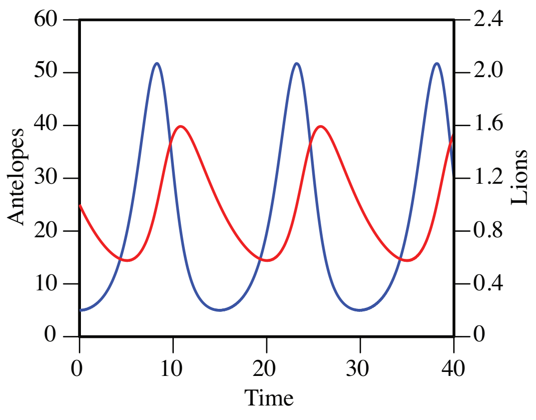
Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Dauer der Prüfung: 60 Minuten.

Räuber-Beute Modell von Lotka und Volterra

Es gibt ein berühmtes Modell der Wechselwirkung von Räuber- und Beutepopulationen von Lotka und Volterra. Wir denken uns eine Räuberpopulation von Löwen (L, Anzahl n_L) und eine Beutepopulation von Antilopen (A, Anzahl n_A). Die Tiere jeder Population werden geboren und sterben.

Nehmen Sie bei der Formulierung des Modells folgende Symbole für die Geburten- und Sterberaten: Geburtenrate Antilopen: $\Pi_{nA,B}$, Sterberate Antilopen: $\Pi_{nA,D}$; Geburtenrate Löwen: $\Pi_{nL,B}$, Sterberate Löwen: $\Pi_{nL,D}$. Die Wechselwirkung führt zu schwingendem Verhalten der Populationen. Beispiel:



a. Formulieren Sie die Bilanzgleichungen für Antilopen und Löwen in momentaner Form. [1 P.]

Lotka und Volterra postulierten folgende Formen für die Geburten- und Todesraten der Tiere. (a) Geburtenrate der Antilopen proportional zur Zahl der Antilopen, mit Proportionalitätsfaktor a; (b) Sterberate der Antilopen proportional zur Zahl der Antilopen und der Löwen, mit Proportionalitätsfaktor b; (c) Geburtenrate der Löwen proportional zur Zahl der Löwen und der Antilopen, mit Proportionalitätsfaktor c; (d) Sterberate der Löwen proportional zur Zahl der Löwen, mit Proportionalitätsfaktor d.

b. Formulieren Sie die konstitutiven Beziehungen für die Geburten- und Sterberaten und leiten Sie das Anfangswertproblem für die beiden Populationen her. [2 P.]

Nehmen Sie im Folgenden diese Werte für die Parameter: $a = 1$, $b = 1$, $c = 0.01$, $d = 0.2$.

c. Für das Modell gibt es ein Gleichgewicht für bestimmte Werte n_A* und n_L*. Beweisen Sie, dass $n_A* = 20$ und $n_L* = 1$. [2 P.]

Das Anfangswertproblem ist nicht-linear, deshalb kann man es nicht in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung verwandeln. Wenn man aber das Modell mit Anfangswerten nahe den Gleichgewichtwerten startet, kriegt man ein lineares Modell für die Abweichungen Δn_A und Δn_L von den Gleichgewichtswerten n_A* und n_L* (Δn_A und Δn_L sind nun die neuen Variablen):

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\Delta n_A \\ \frac{d}{dt}\Delta n_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bn_L^* & -bn_A^* \\ cn_L^* & cn_A^* - d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta n_A \\ \Delta n_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(a - bn_L^*\right)n_A^* \\ \left(cn_A^* - d\right)n_L^* \end{bmatrix}$$

d. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem mit den angegebenen Werten für a, b, c, d folgendermassen geschrieben werden kann: [1 P.]

$$\frac{d}{dt}\Delta n_A = -20\Delta n_L$$
$$\frac{d}{dt}\Delta n_L = 0.01\Delta n_A$$

e. Wandeln Sie die beiden Differentialgleichungen in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung um. [2 P.]

f. Berechnen Sie die Schwingungsperiode dieses Systems. Vergleichen Sie den Wert mit der Schwingungsperiode im oben gezeigten Diagramm. [2 P.]

g. [Zusatzaufgabe] Sind die Kurven im Diagramm trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosimus...)? Sind die Lösungen des IVP für die kleinen Abweichungen in d-f Sinus- oder Cosius-Funktionen? [1 P.]

h. [Zusatzaufgabe] Welche der Kurven im Diagramm gehört zu welchen Tieren? [1 P.]