Natur, Technik, Systeme NTS2

Semesterend-Prüfung, Juni 2015

Viertes Semester Wirtschaftsingenieurwesen, ZHAW, WI13t

Allgemeine Bemerkungen

Dauer der Prüfung: 150 Minuten.

Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Erlaubte Hilfsmittel: **Bücher, persönlich verfasstes Journal**. Rechen- und Schreibzeugs.

Lösen Sie **jede Aufgabe auf einem separaten Blatt**. Die Blätter für die letzte Aufgabe müssen separat abgegeben werden!

Schreiben Sie jedes Blatt an (Name, Datum, Prüfung, Nummer der Aufgabe).

Geben Sie die Aufgabenblätter mit Ihren Lösungen ab. Schreiben Sie die Aufgabenblätter mit Ihrem Namen an.

Punkteverteilung:
Aufgabe 1: 13
Aufgabe 2: 14 (plus 2 Zusatzpunkte)
Aufgabe 3: 13

1. Betrachten Sie zwei Bestände von Tierarten, einen Bestand von Räubern und einen von Beutetieren. Die Beutetiere ernähren sich von einer hier nicht weiter betrachteten und nicht limitierenden Ressource, die Räuber ausschliesslich von den Beutetieren. Die Dynamik der beiden Bestände kann dann durch folgende Differentialgleichungen beschrieben werden:

$$\frac{dR}{dt} = -aR + bRB$$

$$\frac{dB}{dt} = cB - dRB$$

Die Anzahl der Räuber wird mit R, die der Beutetiere mit B bezeichnet, a, b, c und d sind Parameter, welche alle positive Zahlenwerte aufweisen. Die Parameter a und c sind die Ratenparameter für das Wachstum bzw. die Dezimierung der beiden Bestände ohne die jeweils andere Tierart, b und d sind Interaktionsparameter, die angeben, mit welcher Rate sich die beiden Bestände aufgrund der Interaktion mit der jeweils anderen Tierart verändern.

a. Ist die Dynamik der beiden Tierarten gekoppelt oder nicht? Begründung angeben! [1 P]

b. Ist die Dynamik linear oder nichtlinear? Begründung angeben! [1 P]

c. Erklären Sie die Vorzeichen aller vier Terme rechts der Gleichheitszeichen. [2 P]

d. Wie sieht die Dynamik des Räuber- und des Beutebestands aus, wenn die jeweils andere Tierart fehlt (Skizze oder verbale Beschreibung)? Welche Zustände erreichen die beiden Tierbestände langfristig? [2 P]

e. Geben Sie alle Gleichgewichte des Systems an. [2 P]

f. Skizzieren Sie das Vektorfeld des Systems und die Nullklinen im Bereich $R \geq 0$, $B \geq 0$. Aus der Skizze sollte klar werden, wo die Gleichgewichte des Systems liegen und wo das Vektorfeld horizontal bzw. vertikal verläuft (R- und B-Nullklinen). Machen Sie klar, welches die R- und B-Nullklinen sind. Zeichnen Sie einzelne Richtungsvektoren auf beiden Nullklinen sowie in allen Gebieten, die durch je zwei unterschiedliche Nullklinen begrenzt werden. Es sollte klar werden, in welchen Gebieten die Richtungskomponenten des Vektorfelds nach links bzw. nach rechts, und nach oben bzw. nach unten weisen. [5 P]

2. Ein Schauspieler muss für eine Rolle sein Körpergewicht ändern. Im langjährigen Gleichgewicht hat der Schauspieler ein Gewicht von 80 kg, wenn er täglich 2000 kcal aus der Nahrung zu sich nimmt. Er soll sein Gewicht wenn möglich auf 110 kg bringen.

   Wir sind Ernährungsberater des Schauspielers und machen zwei aufeinander aufbauende Modelle, wie das gehen könnte.

   Nehmen Sie für die folgende Arbeit die in der Tabelle verwendeten Symbole der Grössen und Werte bestimmter Parameter.

Table 1: Grössen, Symbole, Werte

Grösse	**Symbol**	**Wert**
Masse	m	
Anfangsmasse	m_0	80
Produktionsrate der Masse	Π_m	
Tägliche Energieaufnahme	I_{in}	2100
Rate des Metabolismus (Energieabgabe)	I_{met}	
Differenz (Energie-Input minus Output)	$D = I_{in} - I_{met}$	
Faktor	f_1	0.005
Faktor	f_2	2.0
Neues erwünschtes Gewicht	m_{des}	110
Differenz Gewicht zu gewünschtem Gewicht	$D_m = m - m_{des}$	
Änderungsrate der Energieaufnahme	dI_n/dt	
Anfangswert der Energieaufnahme	$I_{in}(0)$	2100
Zeitkonstante	τ	2.0

Modell 1. Der Schauspieler nimmt von nun an täglich 2100 kcal zu sich. Die Produktionsrate seiner Masse (Gewicht) ist proportional zur Differenz zwischen Energieinput (I_{in}) und Rate des Metabolismus (I_{met}). Der Proportionalitätsfaktor für diesen Zusammenhang ist f_1. Die metabolische Rate hängt von der Masse der Person ab (vom Gewicht, das man mit sich schleppt!). Der Zusammenhang ist linear:

$$I_{met} = 2000 + f_2(m - 80)$$

a. Formulieren Sie alle Gleichungen des beschriebenen Modells. [2 P]

b. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für $m(t)$. [2 P]

c. Skizzieren Sie die Masse des Schauspielers als Funktion der Zeit (Zahlenwerte auf den Achsen!). Berücksichtigen Sie dabei die tatsächliche Zeitkonstante des Vorgangs und das erreichte Endgewicht. [1 P]

d. Der Faktor f_1 ist biologisch bedingt und kann von der Person nicht beeinflusst werden. Der Faktor f_2 kann durch die Person beeinflusst werden. Erklären Sie die beiden Aussagen. [2 P]

Modell 2. Wir merken, dass das Gewicht zu schnell zu weit geht. Deshalb schlagen wir einen Kontrollmechanismus vor. Die Produktionsrate der Masse wird wie vorhin modelliert. Nun wird aber die Energieaufnahme reguliert, und zwar schaut der Schauspieler auf die Differenz (D_m) zwischen tatsächlichem Gewicht und dem neuen erwünschtem Gewicht. Er passt die Nahrungsaufnahme an, indem er die *Änderungsrate* von I_{in} proportional zu D_m macht. Die Inverse des Proportionalitätsfaktors ist eine Zeitkonstante τ.

e. Erklären Sie, warum in der Beziehung zwischen dI_n/dt und D_m ein Minuszeichen stehen muss. [1 P]

f. Formulieren Sie alle Gleichungen des Modells. [2 P]

g. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für $m(t)$ und $I_{in}(t)$. [2 P]

h. Formulieren Sie das Anfangswertproblem mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für $m(t)$ und zugehörigen Anfangsbedingungen. [2 P] Sie sollten die folgende Differentialgleichung erhalten:

$$\frac{d^2}{dt^2} m + f_1 f_2 \frac{d}{dt} m + \frac{f_1}{\tau} m = m_{des} \frac{f_1}{\tau}$$

i. Bestimmen Sie die Periode der in diesem Modell zu erwartenden Schwingung (falls die Dämpfung schwach ist). [1 P]

j. Die Parameter, die man realistischerweise im Griff hat, sind die Zeitkonstante τ (durch Reaktionszeit auf die Änderung des Gewichts) und f_2. f_1 ist für die Person biologisch festgelegt. Kann man durch Anpassung von τ und/oder f_2 erreichen, dass sich das Gewicht des Schauspielers möglichst ohne starke Ausschläge (ohne Schwingung) dem neuen Idealgewicht (110 kg) nähert? Erklären Sie Ihre Antwort. [1 P]

3. Einem Patienten wird zur Untersuchung der Leber ein radioaktives Präparat ins Blut gespritzt (die Menge beträgt 1.0 µmol). Das Präparat wird vom Blut in die Leber gehen (sonst nirgendwohin), und wird in der Leber behalten, bis es zerfallen ist. Die Halbwertszeit des Präparats beträgt 4000 s.

   Das Blut hat ein Volumen von 7.0 L, die Leber ein solches von 0.50 L.

   Nehmen Sie im Folgenden die Indizes B und L für Blut und Leber und die Symbole n, V, c für Stoffmengen, Volumen und Konzentrationen; I_n für Ströme und Π_n für Zerfallsraten.

   Verwendete Einheiten: mol, Liter, Sekunde.

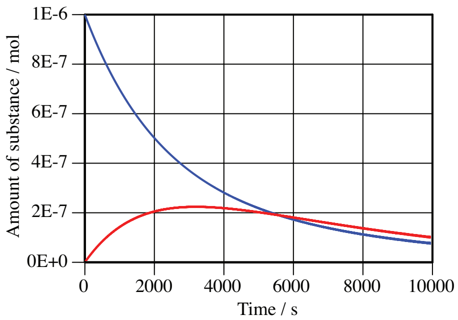
   Modell 1. Das Präparate verteilt sich augenblicklich im Blut. Es geht auch ohne Verzögerung vom Blut in die Leber (mit Anderen Worten, das Präparat geht augenblicklich von der Spritze in die Leber).

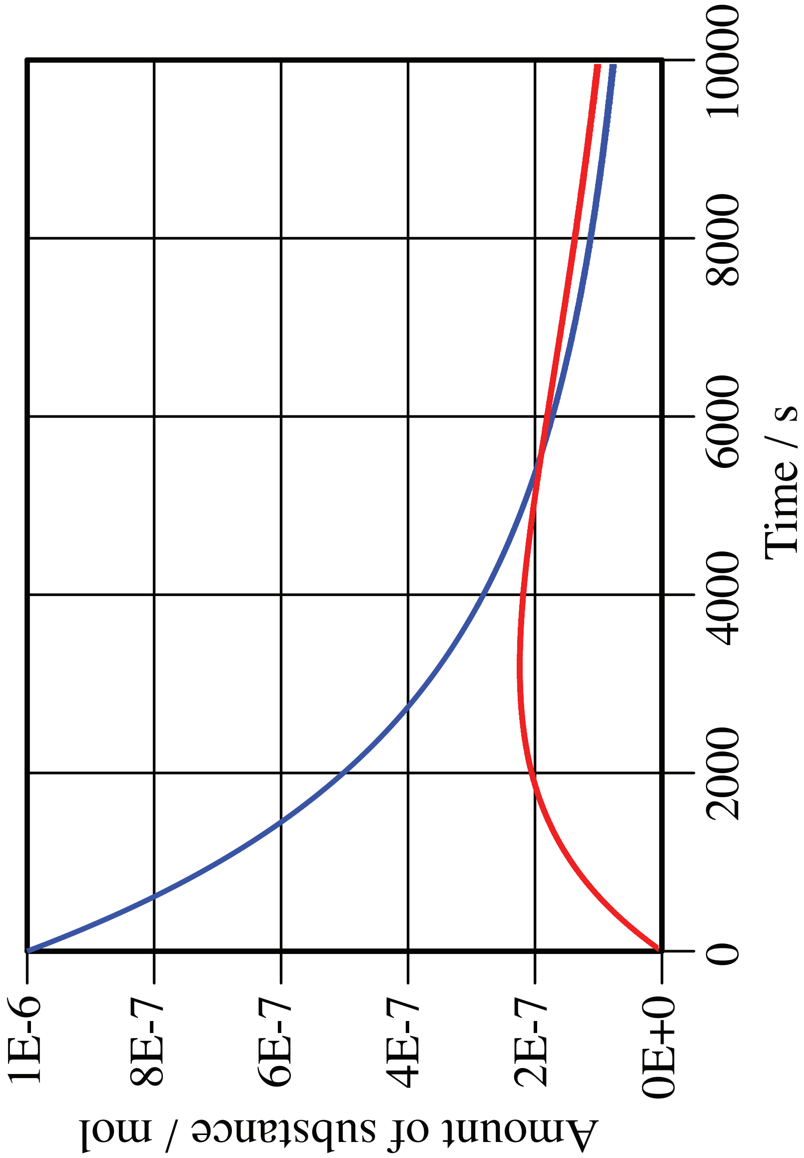
   a. Bestimmen Sie die Zerfallskonstante des radioaktiven Präparates. (Sie sollten 1.73e–4 1/s erhalten). [1 P]
   b. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für $n_L(t)$, das heisst, für die Menge des radioaktiven Präparats in der Leber. [2 P]
   c. Skizzieren Sie so genau wie möglich die Funktion n_L(t), also mit entsprechenden Zahlenwerten auf den Achsen. [2 P]

   Modell 2. Der Transport vom Blut in die Leber braucht Zeit. Er hängt von den Konzentrationen im Blut und in der Leber ab. Wir machen für den Mengenstrom von Blut zu Leber folgenden Ansatz:

$$I_{n.\mathrm{B}\to\mathrm{L}} = -V_B k\left(c_L - \mathcal{K} c_B\right)$$

   d. Im Transportgleichgewicht ist die Konzentration der radioaktiven Substanz in der Leber 20 mal so hoch wie im Blut. Welchen Wert müssen Sie für $\mathcal{K}$ annehmen? [1 P]
   e. Formulieren Sie alle Gleichungen des gesamten Modells (radioaktive Substanz im Blut und in der Leber; die Substanz zerfällt natürlich auch im Blut; in der Leber geht es wie vorher). [2 P]
   f. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für $c_B(t)$ und $c_L(t)$. [3 P]
   g. Im Diagramm (Vergrösserung auf der nächsten Seite) sind die Mengen $n_B(t)$ und $n_L(t)$ für eine bestimmte Simulation dargestellt. Wie gross ist der Transportkoeffizient k, wie er in der Simulation verwendet wurde? [2 P]




Amount of substance / mol
1E-6
8E-7
6E-7
4E-7
2E-7
0E+0
Time / s
0
2000
4000
6000
8000
10000