Natur, Technik, Systeme NTSY2

Semesterend-Prüfung, Juni 2016

Zweites Semester Wirtschaftsingenieurwesen, ZHAW, WI15 (a-c), WI14t

---

Allgemeine Bemerkungen

Dauer der Prüfung: 150 Minuten.

Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Erlaubte Hilfsmittel: **Persönlich verfasste Zusammenfassung; Buch: The Dynamics of Heat**. Rechen- und Schreibzeugs.

Lösen Sie **jede Aufgabe auf einem separaten Blatt**.

Schreiben Sie jedes Blatt an (Name, Datum, Prüfung, Nummer der Aufgabe).

Geben Sie die Aufgabenblätter mit Ihren Lösungen ab. Schreiben Sie die Aufgabenblätter mit Ihrem Namen an.

Punkteverteilung:
Aufgabe 1: 14
Aufgabe 2: 13
Aufgabe 3: 13

1. Im Folgenden sollen Sie ein Modell für den Lagerbestand N eines Produkts im Lager eines Händlers analysieren. Der Händler liefert die Ware mit *konstanter* Rate D an die Kunden aus. Er erhält die Ware von einem Produzenten mit einer Rate λ.

   Der Produzent strebt an, gerade so viel zu produzieren, dass sich beim Händler ein bestimmter Ziellagerbestand $a \cdot D$ einstellt, wobei a ein frei wählbarer Parameter ist. Wenn der aktuelle Lagerbestand N höher ist als der Ziellagerbestand, so wird die Produktionsrate reduziert, wenn er tiefer ist, wird sie erhöht. Der Parameter, über den aus einer Differenz zwischen aktuellem Lagerbestand und Ziellagerbestand eine Änderungsrate der Produktionsrate berechnet wird, ist μ. Dies führt auf folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda - D$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \mu(aD - N)$$

   a. Erklären Sie die rechte Seite der Differentialgleichung für N. [0.5 P]

   b. Welche Bedeutung und welche Einheit hat der Parameter μ in der Differentialgleichung für λ? [1 P]

   c. Gehen Sie im Moment davon aus, dass λ den Wert Null hat und skizzieren Sie den Verlauf von N als Funktion der Zeit (im selben Diagramm) einmal für $D = D_1$ und einmal für $D = D_2$, wobei $D_2 < D_1$. Gehen Sie vom Lagerbestand $N_0 = N(t=0)$ aus und geben Sie in Ihrer Skizze die Zeitpunkte an, zu denen N Null wird. [2 P]

   d. Wann sind die Änderungsraten von N und λ positiv bzw. negativ oder Null? Argumentieren Sie mit den beiden oben gegebenen Gleichungen. [1 P]

   e. Geben Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems an. [2 P]

   f. Skizzieren Sie das Vektorfeld des Systems im Bereich $N \geq 0$, $\lambda \geq 0$. Aus der Skizze sollte klar werden, wo die Gleichgewichte des Systems liegen und wo die Dynamik gross (schnell) bzw. klein (langsam) ist. [3.5 P]

   g. Zeichnen Sie die N- und λ-Null-Klinen in das Vektorfeld aus Teilaufgabe f ein. Die beiden Null-Klinen müssen visuell unterscheidbar sein. [2 P]

   h. Skizzieren Sie die zeitliche Entwicklung von N und λ für $a = 1$ und für einen Anfangszustand, der vom Gleichgewicht abweicht. Es soll deutlich werden, auf welchem Niveau sich die eine Grösse befindet, wenn die andere ihre Minima und Maxima erreicht und welche Vorzeichen die beiden Veränderungsraten in Bezug zueinander haben. Tragen Sie D auf der vertikalen Achse ein. [2 P]

2. Es soll ein Modell für das Angleichen von Löhnen in einer Firma erstellt werden. Eine Firma A übernimmt durch Fusion N_B Angestellte aus Firma B, die im Prinzip die gleiche Stellung und gleiches Anforderungsprofil wie eine entsprechende Gruppe von N_A Angestellten in der Firma A haben. Die neuen Leute haben aber in der Firma B weniger verdient als die Leute in Firma A. Die Löhne der Angestellten werden mit W_A, resp. W_B, bezeichnet. Nun sollen langsam über ein paar Jahre hinweg die Löhne der Angestellten der beiden Gruppen einander angeglichen werden. Natürlich möchte die Firmenleitung diese Änderung gerne ohne Vergrösserung der Gesamtlohnsumme $P_{tot} = P_A + P_B$ machen. Gleichzeitig ist aber so viel Arbeit vorhanden, dass man die Zahl der Mitarbeiter nicht verändern will.

   Wir nehmen an, dass die Mitglieder einer Gruppe alle gleich gestellt sind, der Lohn W_A, resp. W_B, berechnet sich dann aus der Lohnsumme P_A der Firma A, resp. P_B der Firma B:

$$W_A = \frac{1}{N_A} P_A \qquad W_B = \frac{1}{N_B} P_B$$

   Verwenden Sie folgende Zahlenwerte: $N_A = 20$ und $N_B = 40$ (ohne Einheiten). Die Löhne zum Zeitpunkt $t = 0$ der Fusion betragen $W_{\mathrm{A},init} = 10‘000$ Fr/Monat und $W_{\mathrm{B},init} = 8‘000$ Fr/Monat.

   Modell 1. Im ersten Modell wird die Transferrate I_P von A nach B proportional zur Differenz der Löhne in Firma B und A gewählt. Die Proportionalitätskontante wird mit G bezeichnet. Der Zahlenwert für den Proportionalitätsfaktor ist gleich $G = 2$ in den entsprechenden Einheiten.

   a. Zeichnen Sie das Flowchart für das entsprechende Modell und formulieren Sie sämtliche Gleichungen des Modells. [1.5 P]
   b. Bestimmen Sie das Anfangswertproblem für P_A. Warum ist das Modell eindimensional? [1.5 P]
   c. Woran erkennt man, dass die Lohnsummen P_A und P_B der Firmen A und B Mengen sind, der Lohn der Angestellten aber ein Niveau (Potential, intensive Grösse) ist? [1 P]
   d. Bestimmen Sie den Wert für den Lohn am Ende des Ausgleichsprozesses. [1 P]
   e. Bestimmen Sie die Zeitkonstante des Systems und skizzieren Sie W_A und W_B als Funktionen der Zeit (mit Zahlen auf den Achsen). [3 P]

   Modell 2. Im zweiten Modell wird die Änderungsrate der Transferrate I_P proportional zur Differenz der Löhne in Firma B und A gewählt. Der Proportionalitätsfaktor wird mit k_L bezeichnet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Transferrate null: $I_P(0) = 0$.

f. Skizzieren Sie das Flowchart für das neue Modell und formulieren Sie sämtliche Gleichungen des neuen Modells. [2 P]

g. Leiten Sie das Anfangswertproblem für die Transferrate I_P als Differentialgleichung 2. Ordnung her. [2 P]

h. Ist die Lösung dieses Anfangswertproblems eine gedämpfte oder ungedämpfte Schwingung? [0.5 P]

i. Wie gross ist die Periode der Schwingung? [0.5 P]

3. Ein Medikament A wird mit *konstantem* Stoffmengen-Strom $I_{A,in}$ dem Blut eines Patienten zugeführt. Im Blut zerfällt A entsprechend der *vollständigen* Reaktion 1. Ordnung

$$A \rightarrow B$$

in den Stoff B. (Reaktion 1. Ordnung heisst, dass die Reaktionsrate proportional zur Konzentration $c_A(t)$ des Ausgangsstoffes A ist.) Der Stoff B wird aus dem Blut mit einer Rate $I_{B,out}$ ausgeschieden, die proportional zur Konzentration $c_B(t)$ des Stoffes B ist. Die Stoffkonzentrationen $c_A(t)$ und $c_B(t)$ sind zu einem bestimmten Zeitpunkt t im Blut an jeder Stelle gleich (homogenes System).

Die Ratenkonstante für die Reaktion A → B ist k_A; mit G_{nB} bezeichnen wir den Leitwert (Transportfaktor) für den Prozess der Ausscheidung. Das Volumen V des Blutes ist konstant

a. Welche Einheiten haben die oben eingeführten Grössen V, $c_A(t)$ und $c_B(t)$, $I_{A,in}$ und $I_{B,out}$, k_A, G_{nB}? [1 P.]

b. Skizzieren Sie ein Diagramm (flowchart) und formulieren Sie alle Gleichungen für das oben beschriebene Modell. [3 P.]

c. Bestimmen Sie das Anfangswertproblem für $c_A(t)$ und $c_B(t)$. [2 P.]

d. Berechnen Sie algebraisch den stationären Zustand des Systems, geben Sie also Ausdrücke für c_A^* und c_B^* an (der Stern * steht für die Werte im stationären Zustand). [2 P.]

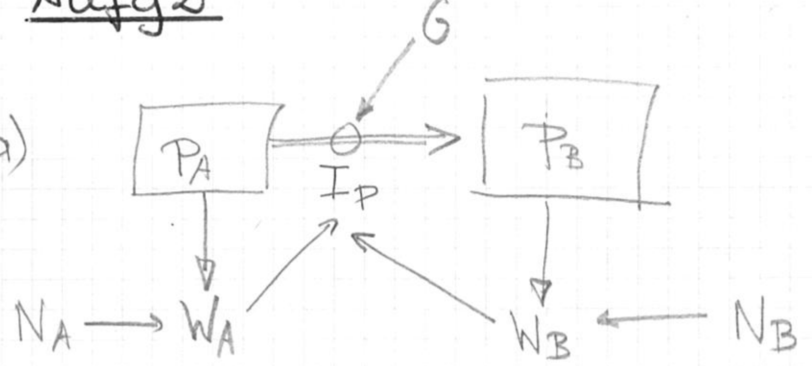
e. Nehmen Sie nun an, dass *keine* Zufuhr von Stoff A erfolgt. Am Anfang hat es eine Mengen von A (d.h., $n_A(t = 0) > 0$) während die Menge von B Null ist (d.h., $n_B(t = 0) = 0$). Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Funktionen $n_A(t)$ und $n_B(t)$ bis zum Gleichgewicht. Die Anfangs- und Endzustände und Krümmungen der Funktionen sollten aus Ihrer Skizze hervorgehen. [2 P.]

f. Nehmen Sie wieder an, dass *keine* Zufuhr von Stoff A erfolgt. (1) Wie gross ist die Änderungsrate von n_B ganz am Anfang? (2) Wie gross ist die Änderungsrate von n_A zum Zeitpunkt $t = t'$, zu dem n_B sein Maximum erreicht? Drücken Sie die Änderungsrate mit Hilfe von $n_B(t = t')$ aus. [3 P.]

NTSY2 FS16 SEP
24. Juni 2016

Aufg2

a)



$\dot{P}_A = -I_P \;;\; P_A(0) = N_A \cdot W_{A,init}$

$\dot{P}_B = I_P \;;\; P_B(0) = N_B \cdot W_{B init}$

$I_P = G(W_A - W_B)$

$W_A = \frac{P_A}{N_A} \;;\; W_B = \frac{P_B}{N_B}$

b) Bilanzgleichung: $\dot{P}_A = -I_P$

konst. Beziehung: $I_P = G(W_A - W_B)$

$\Rightarrow \dot{P}_A = -G(W_A - W_B)$

konst. Beziehung: $W = \frac{P}{N}$

$\Rightarrow \dot{P}_A = -G\left(\frac{P_A}{N_A} - \frac{P_B}{N_B}\right)$

Gesamtlohnsumme $P_{tot} = P_A + P_B$

$\Rightarrow \dot{P}_A = -G\left(\frac{P_A}{N_A} - \frac{P_{tot} - P_A}{N_B}\right)$

Terme zusammen fassen:

$$\frac{dP_A}{dt} = -G\left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}\right)P_A + \frac{G \cdot P_{tot}}{N_B}$$

c) Die Löhne gleichen sich an, das sieht man mit $I_p = G(W_A - W_B)$

d) Die Gesamtlohnsumme bleibt erhalten:

$$P_{tot} = P_A(t) + P_B(t)$$

für jeden Zeitpunkt t:

$$P_{tot} = P_A(0) + P_B(0) = P_A(t^*) + P_B(t^*)$$

$$\Leftrightarrow \quad N_A W_{A,init} + N_B W_{B,init} = N_A W_E + N_B W_E$$

wobei W_E der Lohn am Ende des Ausgleich prozesses ist:

$$W_E = \frac{N_A W_{A,init} + N_B W_{B init}}{N_A + N_B}$$

$$= \frac{20 \cdot 10'000 + 40 \cdot 8'000}{20 + 40}$$

$$= 8700 \text{ Fr/Monat}$$

e) Zeitkonstante

Weg 1 aus b)

$$\frac{1}{\tau} = G\left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tau = G^{-1}\left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}\right)^{-1}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40}\right)^{-1}$$

$$\approx 7 \text{ Monate}$$

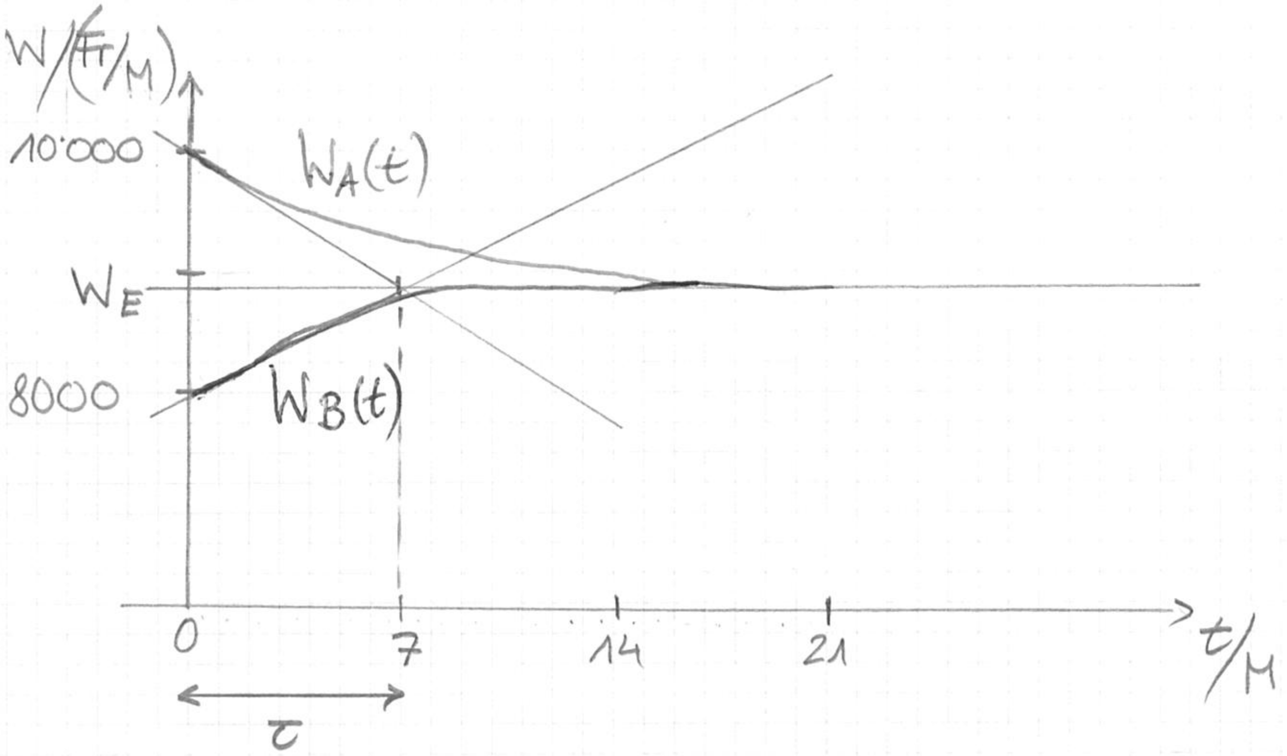
Weg 2

$$\tau = R \cdot C$$

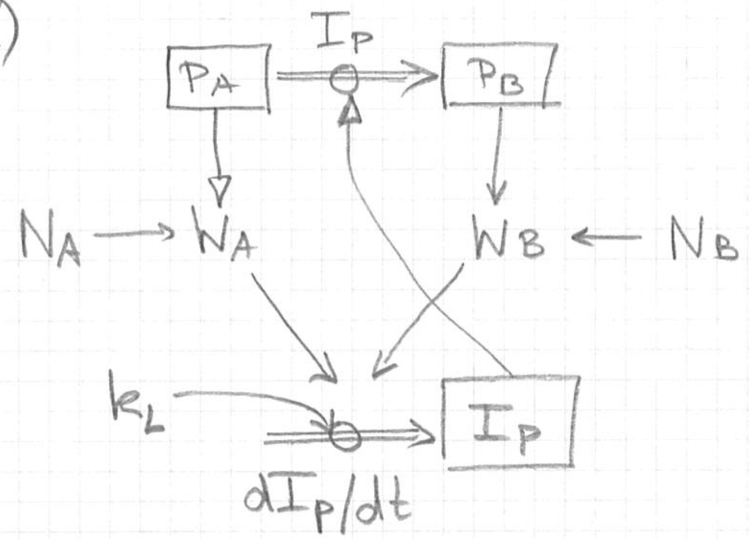
$$R = \frac{1}{G}$$

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

mit $C_1 = N_A$ und $C_2 = N_B$



f)



$$\frac{dI_P}{dt} = k_L\,(W_A - W_B)\;;\quad I_P(0) = 0$$

g) Gleichung oben:

$$\frac{dI_P}{dt} = k_L\,(W_A - W_B)$$

$$W_A = \frac{P_A}{N_A}\;;\quad W_B = \frac{P_B}{N_B}$$

$$\Rightarrow \frac{dI_P}{dt} = k_L\left(\frac{P_A}{N_A} - \frac{P_B}{N_B}\right)$$

Bilanzgleichungen: $\dot{P}_A = -I_P\;;\quad \dot{P}_B = I_P$

d.h. wir müssen die Gleichung für I_P noch einmal ableiten bevor wir die Bilanzgleichung einsetzen können:

$$\frac{d^2 I_P}{dt^2} = k_L \left(\frac{\dot{P}_A}{N_A} - \frac{\dot{P}_B}{N_B} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 I_P}{dt^2} = k_L \left(\frac{-I_P}{N_A} - \frac{I_P}{N_B} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 I_P}{dt^2} = -\underbrace{k_L \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B} \right)}_{\omega_0^2} I_P$$

b) ungedämpfte Schwingung

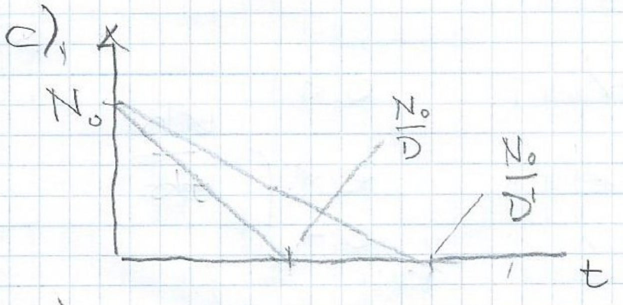
c) $$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_L \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B} \right)}}$$

Musterlösungen zur Aufgabe zum Systemverhalten, NTS2, FS16

a) Anzahl produzierter Einheiten pro Zeiteinheit ist Zufluss, Abfluss entspricht Bedarfsrate D.

b) μ ist ein Mass dafür, wie schnell sich der aktuelle Lagerbestand N dem Wunschlagerbestand aD anpasst; $[\mu] = 1/T^2$

c)



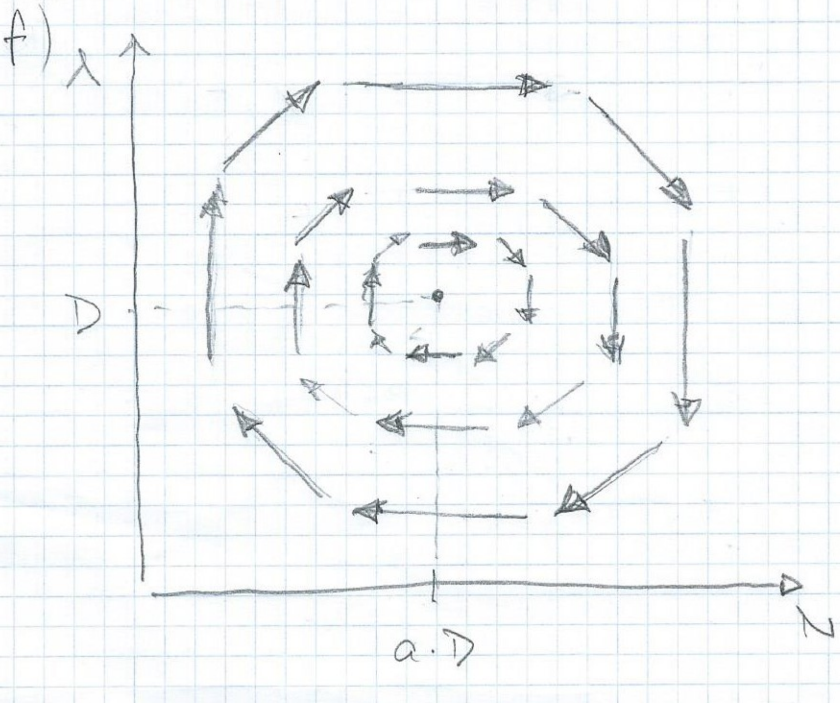
$D' < D$

d)

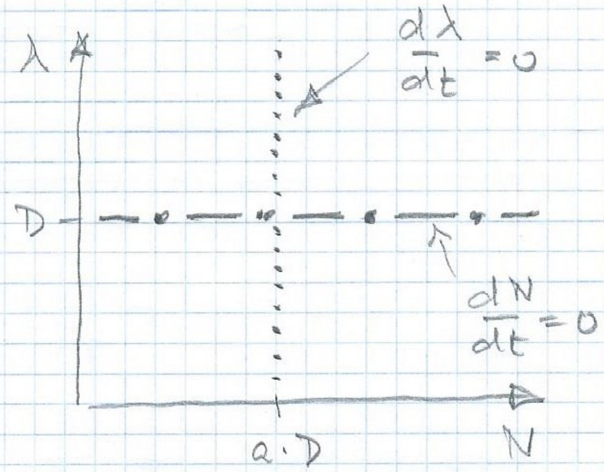
$$\frac{d\lambda}{dt}\begin{cases} >0 & ; \; aD > N \\ <0 & ; \; aD < N \\ =0 & ; \; aD = N \end{cases} \qquad \frac{dN}{dt}\begin{cases} >0 & ; \; \lambda > D \\ <0 & ; \; \lambda < D \\ =0 & ; \; \lambda = D \end{cases}$$

e) $(N^*, \lambda^*) = (N = a\cdot D, \lambda = D)$

f)



g)



h)