

Erlaubte Hilfsmittel: **Persönlich verfasste Zusammenfassung von bis zu 12 Seiten; Buch: The Dynamics of Heat.** Rechen- und Schreibzeugs.

Antworten müssen begründet und nachvollziehbar sein.

Dauer der Prüfung: 60 Minuten.

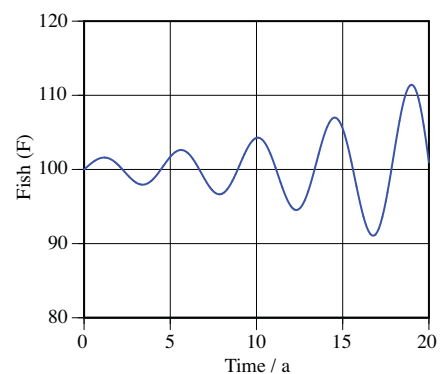
Modell zur Fischerei-Industrie

Analysieren Sie folgendes Modell analytisch. In einem festen räumlichen Gebiet leben Fische (Anzahl: F). Es gibt keine Migration in das oder aus dem Gebiet, nur Geburt, (natürlicher) Tod und Wegnahme durch Fischen. Die Fischerei-Industrie verwendet eine sich verändernde Zahl von Booten (Anzahl: B).

Die Netto-Geburtenrate (Geburtenrate minus natürliche Sterberate) sei proportional zu F mit einem festen (Geburten-)Faktor a . Die Rate der Fischentnahme geschieht mit einer Rate, die proportional zur Zahl der Boote ist (mit einem Proportionalitätsfaktor c).

Die Zahl der Boote wird durch Vergleich der existierenden Zahl Fische (F) mit einem erwünschten Bestand (Symbol D) verändert, und zwar folgendermassen: Die netto Produktionsrate (Produktion minus Verschrottung) der der Boote ist proportional zur Differenz von D und F (mit einem Proportionalitätsfaktor e).

- Formulieren Sie alle Gleichungen des Modells. [1.5 P.]
- Schreiben Sie das Modell in Standardform für Anfangswertprobleme (nur noch Differentialgleichungen 1. Ordnung mit Anfangsbedingungen). [1.5 P.]
- Ist das Anfangswertproblem linear/nichtlinear, homogen/inhomogen, autonom/nicht-autonom? [1.5 P.]
- Leiten Sie eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung für $F(t)$ her. [1.5 P.]
- Das Modell führt auf schwingendes Verhalten. Wie gross ist die Schwingungsperiode, falls man Dämpfung (oder Wachstum) vernachlässigt? [1.5 P.]
- Simulation mit $F_0 = 100$, $B_0 = 100$, $D = 100$, $a = 0.22$, $c = 0.2$, $e = 10$ ergibt eine exponentiell wachsende Schwingung (Bild).
(a) Stimmt die Schwingungsperiode mit Ihrer analytischen Lösung aus (e) überein? (b) Warum wächst die Amplitude der Schwingung? (c) Was wäre die Bedingung für ungedämpfte Schwingung? Für gedämpfte Schwingung? [1.5 P.]
- Wenn Sie F und B keine Einheit geben, und die Zeit die Einheit a (Jahr) hat, welche Einheiten haben dann c und e ? [1 P.]



NTSY2: Natural and Technical Systems

Test 5, May 2017

Second Semester WI16

Allowed tools: **Personally written summary of up to 12 pages. Book: The Dynamics of Heat.** Calculators and writing materials.

Answers must be explained and must be documented.

Duration of the exam: 60 minutes.

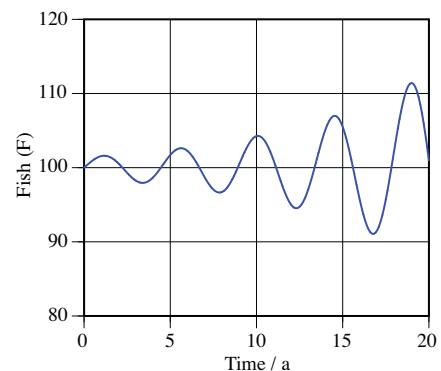
Model of fisheries industry

Analyze the following model in analytical form. There is fish (amount: F) in a certain area of the oceans. There is no migration into or out of the area, only birth and (natural) death and extraction by fishing. The fisheries industry is using a variable number of boats (quantity: B).

The *net birth rate* (birth rate minus death rate) is assumed to be proportional to F (we use a constant birth factor a). *Fishing* happens at a rate proportional to the number of boats (we use a factor of proportionality c).

The number of boats is adjusted by comparing the number of fish (F) and a desired stock D (desired amount of fish). The adjustment happens as follows: The *net production rate* (production minus scrapping) of the boats is proportional to the difference of D and F (we use a factor of proportionality e).

- Formulate all equations of the model. [1.5 P.]
- Formulate the standard form of the initial value problem (only first order differential equations and initial conditions). [1.5 P.]
- Is the IVP linear/non-linear, homogeneous/inhomogeneous, autonomous/non-autonomous? [1.5 P.]
- Formulate a single differential equation of second order for $F(t)$. [1.5 P.]
- The model shows oscillatory behavior. What is the oscillatory period if we neglect damping (or growth)? [1.5 P.]
- Simulating the model with $F_0 = 100$, $B_0 = 100$, $D = 100$, $a = 0.22$, $c = 0.2$, $e = 10$ leads to an exponentially growing oscillation (diagram). (a) Do the actual (measured) and the theoretical oscillatory periods agree? (Theoretical period from e.) (b) Why does the amplitude of the oscillation grow? (c) What is the condition for undamped oscillation? For damped oscillation? [1.5 P.]
- If you do not give F and B any units, and time the unit a (year), what are the units of c and e ? [1 P.]



Solutions

a. Balance