

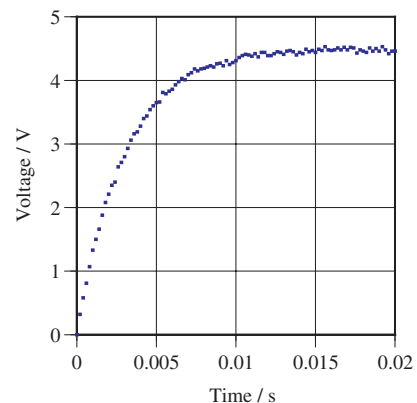
ASSESSMENTPRÜFUNG 2006

Blatt 1		Studiengang:	DP
		Jahr:	2006
		ExpertInnen:	
Klassen:	DP05a	Datum:	6.9.2006
Lehrer:	Fuh	Zeit:	8:00 – 11:00

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG IN PHYSIK

ERLAUBTE HILFSMITTEL: Eigene Zusammenfassung und Bücher, Taschenrechner

- A capacitor is charged in a simple circuit containing a real battery and a resistor. The voltage across the capacitor was measured as a function of time (see diagram). Parameters of the system should be determined with the help of a dynamical system. Resistance of the resistor, capacitance, internal resistance and open circuit voltage of the battery are all unknown.
 - Sketch a diagram of a system dynamics model.
 - Formulate all equations of your model.
 - The open circuit voltage of the battery can be determined directly from the data (without the dynamical model). Explain why. Determine this value.
 - Determine the value of the time constant of the circuit.
 - You will need more experiments and measurements for determining the parameters uniquely. Describe measurement methods for a sufficient number of further experiments and demonstrate how you determine the parameters.
You have the original elements and further similar elements at your disposal. For data acquisition, you have volt meters and ammeters.

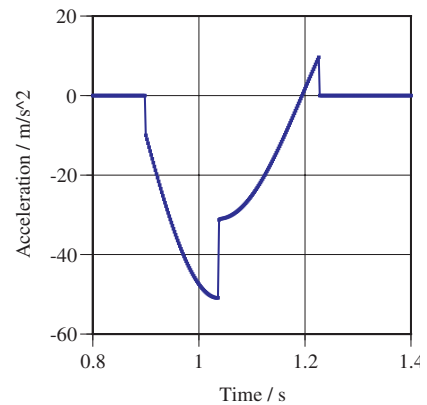


- Inside and outside of a house are at a temperature of 25°C and temperature is 35°C, respectively. If all doors and windows are closed, the home has an energy conductance of 300 W/K. There is no sunlight getting inside. (Imagine the house as an airtight and opaque box.)

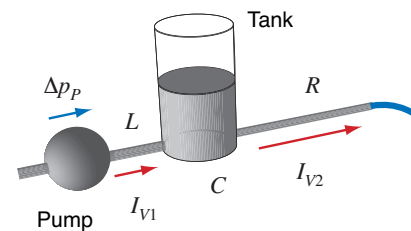
Verteiler

Kandidaten: nach Schluss der Prüfung an Dozierende zurück
 Archiv: je ein Exemplar pro Abteilung z.H. Archiv
 ExpertInnen:

- a. If we do not cool the house, the inside temperature will be 31.3°C after 10 hours. Determine the energy capacitance of the house.
 - b. What is the entropy current arriving inside at 25°C ?
 - c. A heat pump is used to keep the inside at 25°C . If the heat pump worked ideally, what would be the power driving it?
 - d. The coolant of the heat pump takes up entropy in the house at 10°C . It emits it at 45°C . What is the (minimal) real power for driving the pump?
3. A buffer for train cars is designed and simulated with the help of a model. A train car having a mass of 10 tons moves on a horizontal track and hits a hard obstacle at a speed of 5 m/s. The elastic properties of the buffer are modeled as a linear spring having a length of 0.50 m. Internal friction is modeled as a constant force having the same value for compression and expansion.
- a. If the car hits the obstacle at 5 m/s, the spring may not be compressed more than its length, even if we neglect internal friction. What is the minimal value of the spring constant?
 - b. Again, neglect internal friction in the spring. What is the duration of the collision?
 - c. The diagram shows the simulated acceleration of the car. Explain the result formally. (Friction due to the rails and air resistance are neglected.) Determine the value of the damping force.



4. A simple windkessel model of the aorta (see figure) is to be written in state space form. The pump is characterized by a known pressure difference (Δp_P). The short pipe leading to the tank has virtually no resistance which means that the current I_{V1} is determined by induction only (inductance L). The tank is characterized by a capacitance C . The pipe leading away from the tank only show resistive properties (resistance R).
- a. Formulate the law of balance for the tank and the expression for the rate of change of I_{V1} .
 - b. Formulate all other necessary equations.
 - c. Formulate initial values.
 - d. Rewrite the system of equations such that only two differential equations and two initial values are left. Choose the pressure in the aorta and the current I_{V1} as state variables.
 - e. Rewrite the system in matrix form. Why can we do this?



5. Laws of balance in instantaneous or integrated form have to be formulated for the following examples.
 - a. Two bodies of water are in thermal contact. Both are mixed mechanically. The entropy transfer layer is modeled as a resistor. Write the laws of balance of entropy for the bodies of water and for the transfer layer in instantaneous form.
 - b. Elephants live in two connected areas. They can be born, die, and migrate from area to area. Formulate the *integrated* law of balance of elephants for both areas *together*.
 - c. A glider moves on a horizontal track. Friction between glider and track is taken into account. Write the laws of balance of momentum for the glider for the horizontal and the vertical directions in instantaneous form.
 - d. What is the law of balance of charge of a solenoid (inductor with resistance) in an electric circuit?
 - e. Write the instantaneous laws of balance of charge and amount of substance of a battery.

6. A photovoltaics panel with an area of 1.0 m^2 is exposed to constant solar radiation having an energy current of 800 W/m^2 . Initially, panel and cells are at ambient temperature (300 K).

The panel has a heat capacity (energy capacity) of 1000 J/K . The absorption coefficient of the panel for sunlight is 0.85 . The emission coefficient of the panel for thermal radiation is 1 . Energy goes directly to the air as well (the heat transfer coefficient is $12 \text{ W/(K}\cdot\text{m}^2)$).

The electric efficiency of the panel decreases with temperature according to $\eta = 0.15 - b(T - T_a)$, $b = 1.667 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. The efficiency is defined as the ratio of electric power and energy current of sunlight (not the absorption rate!).

- a. What is the electric power right at the beginning?
- b. Formulate the law of balance of energy of the panel in general (instantaneous) form.
- c. What is the rate of change of temperature of the panel right at the beginning?
- d. Determine the steady-state temperature of the panel resulting after some time.
- e. Sketch as precisely as possible the temperature and the electric power of the panel as functions of time.

7. Mercury spilled in a room evaporates a little. A concentration of $0.1 \text{ mg/m}^3 \text{ Hg}$ in air is permissible during a work week.

- a. At 25°C and 1.013 bar , Hg has a chemical potential of 31840 J/mol (see Table 1). The potential of liquid Hg is 0 J/mol . Does liquid Hg further evaporate in a pure Hg atmosphere, or rather, does mercury vapor condense (at 25°C and 1.013 bar)? Why?

Table 1: Mercury

	$\mu / \text{kJ/mol}$	$\alpha / \text{J/K}$
<i>l</i>	0	-76
<i>g</i>	31.84	-175

- b. Determine the equilibrium pressure (vapor pressure) of mercury vapor at 25°C. Treat the vapor as an ideal gas. (This is the pressure of Hg vapor in the air in a room. You should get a value of 0.27 Pa.)
- c. What is the equilibrium concentration in mg/m³? The molar mass of Hg is 200 g/mole. How long would we be allowed to work in this room during a week?
- d. How much larger or smaller is the concentration of mercury vapor at 35°C?
8. The oscillation period of a torsion pendulum is measured (see Table 2). Missing parameters are to be determined. The pendulum consists of a horizontal rod fixed to a vertical axis at its middle (the rod has an unknown moment of inertia J_s). The axis is attached to a torsion spring having an unknown spring constant D . Two weights having known mass are mounted on the rod at given distances from the axis (Table 2).
- a. Determine the equation used to calculate the moment of inertia of the system made up of rod and two weights (200 g per weight). For your model, assume that the weights are very thin compared to their distance from the axis.
- b. How does the period of oscillation depend upon moment of inertia and spring constant? Therefore, how does it depend upon J_s , d and D ?
- c. Draw a diagram using the data. Plot the *square of the period* as a function of the *square of the distance*.
- d. Use the data in the diagram to determine the moment of inertia of the rod and the spring constant.

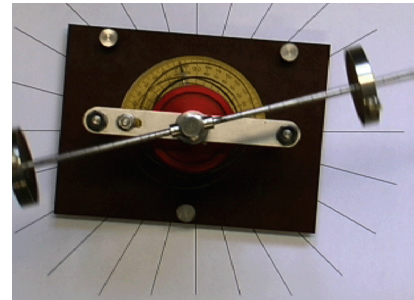


Table 2: Torsion pendulum

d / cm	T / s
8.0	1.92
12.0	2.56
16.0	3.24
20.0	3.96

ASSESSMENTPRÜFUNG 2006

Blatt 1		Studiengang: DP
		Jahr: 2006
		ExpertInnen:
Klassen: DP05a		Datum: 6.9.2006
Lehrer: Fuh		Zeit: 8:00 – 11:00

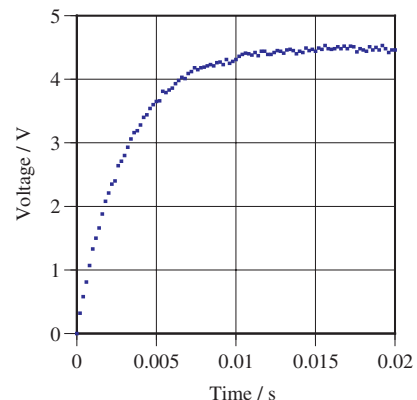
SCHRIFTLICHE PRÜFUNG IN PHYSIK

ERLAUBTE HILFSMITTEL: Eigene Zusammenfassung und Bücher, Taschenrechner

- Ein Kondensator wird in einem einfachen Stromkreis über ein Widerstandselement mit Hilfe einer realen Batterie geladen. Die Spannung über dem Kondensator ist als Funktion der Zeit gemessen worden (siehe Diagramm). Mit Hilfe eines dynamischen Modells sollen Parameter des Systems bestimmt werden. Widerstandswert, Kapazität, innerer Widerstand der Batterie und Leerlaufspannung der Batterie sind alle unbekannt.
 - Skizzieren Sie ein systemdynamisches Modell.
 - Formulieren Sie alle Gleichungen Ihres Modells.
 - Die Leerlaufspannung der Batterie lässt sich (ohne dynamisches Modell) direkt aus den Daten bestimmen. Warum (Beweis)? Bestimmen Sie diesen Wert.
 - Bestimmen Sie die Zeitkonstante des Stromkreises.
 - Sie brauchen weitere Versuche für eine eindeutige Parameterbestimmung. Beschreiben Sie mögliche Messmethoden für eine genügende Anzahl weiterer Parameter und zeigen Sie, wie Sie daraus alle Parameter bestimmen.

Sie haben die Originalelemente und weitere ähnliche Elemente zum Experimentieren. Volt- und Amperemeter und Spannungsquellen stehen zur Verfügung.

- Im Innern eines Hauses ist es 25°C warm, draussen ist es konstant 35°C . Abgeschlossen hat das Haus einen Energieleitwert von 300 W/K . Sonnenlicht soll nicht ins Innere dringen. (Stellen Sie sich das Haus als luft- und lichtdichte Kiste vor.)



Verteiler

Kandidaten:
Archiv:
ExpertInnen:

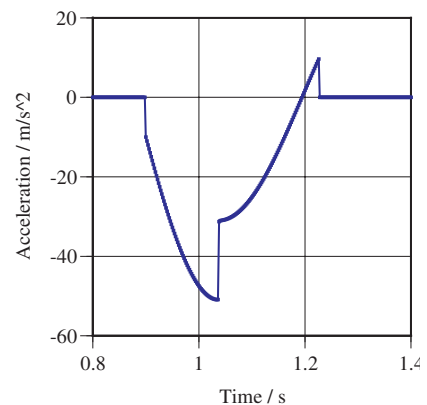
nach Schluss der Prüfung an Dozierende zurück
je ein Exemplar pro Abteilung z.H. Archiv

- a. Wenn man nicht kühlt, ist das Innere nach 10 Stunden 31.3 Grad warm. Wie gross ist die Energiekapazität des Hauses?
- b. Wie gross ist bei 25°C Innentemperatur der Entropiestrom, der im Innern ankommt?
- c. Man möchte mit einer Wärmepumpe die Innentemperatur auf 25°C halten. Falls die Wärmepumpe absolut ideal arbeiten könnte, wie gross müsste dann ihre Antriebsleistung sein?
- d. Das Kühlmittel in der Wärmepumpe nimmt die Entropie im Haus bei 10°C auf und gibt sie bei 45°C ab. Wie gross muss die reale Antriebsleistung (mindestens) sein?

3. Ein Puffer für Eisenbahnwagen soll entworfen und (im Modell) ausprobiert werden. Man lässt einen Wagen (Masse 10 Tonnen) auf horizontaler Strecke mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 5 m/s auf ein hartes Hindernis zu rollen.

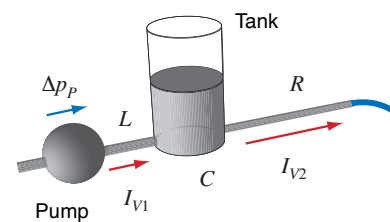
Die elastische Eigenschaft des Puffers soll im Modell einer linearen Feder entsprechen. Sie ist 0.50 m lang. Die innere Reibung der Feder wird sowohl beim Stauchen als auch beim Expandieren als gleich grosse konstante Kraft modelliert.

- a. Bei dieser Auffahrgeschwindigkeit (5 m/s) darf die Feder gerade maximal um ihre Länge gestaucht werden, wenn man alle Reibeffekte vernachlässigt. Wie gross muss man die Federkonstante mindestens machen?
- b. Wenn man weiterhin die Reibung in der Feder vernachlässigt, wie lange dauert dann der Aufprall?
- c. Im Diagramm ist die für einen virtuellen Versuch gerechnete Beschleunigung angegeben. Erklären Sie (formal), wie dieses Resultat zustande kommt. (Reibung mit den Schienen und Luftwiderstand werden vernachlässigt.) Bestimmen Sie die Grösse der (konstanten) Dämpfungskraft.



4. Ein bestimmtes einfaches Windkessel Modell der Aorta (siehe Figur) soll in Zustandsform dargestellt werden.

Die Pumpe ist durch eine (gegebene) Druckdifferenz Δp_P gekennzeichnet. Das Rohr zum Tank hat so gut wie keinen Strömungswiderstand. Der Strom I_{V1} wird durch den induktiven Effekt (Induktivität L) voll bestimmt. Der Tank wird durch eine Kapazität C gekennzeichnet, und das Rohr aus dem Tank hat nur einen Widerstand R .



- a. Formulieren Sie das Bilanzgesetz für den Tank und den Ausdruck für die Änderungsrate des Stromes I_{V1} .
- b. Formulieren Sie alle anderen nötigen Gleichungen.
- c. Formulieren Sie Anfangsbedingungen.
- d. Schreiben Sie das System von Gleichungen so um, dass am Ende nur noch zwei Differentialgleichungen und zwei Anfangsbedingungen vorliegen. Als Zustandsvariablen sollen

- Sie den Aortadruck und den Strom I_{V1} wählen.
- e. Schreiben Sie das System in Matrixform. Warum geht das?
5. Für die folgenden Beispiele sind (momentane oder integrierte) Bilanzgesetze gesucht. Begründen Sie kurz Ihre Antworten.
- Zwei Wassermengen sind in thermischem Kontakt, sie werden beide mit Mixern gerührt. Für die Entropietransferschicht macht man das Modell eines Widerstandselementes. Schreiben Sie die Entropiebilanzgleichungen für die beiden Wassermengen und für die Transferschicht in *momentaner* Form.
 - Es gibt zwei zusammenhängende Gebiete, in denen Elefanten leben. Sie können geboren werden, sterben, und von Gebiet zu Gebiet wandern. Formulieren Sie die *integrierte* Form der Bilanz für die Elefanten für beide Gebiete *zusammen*.
 - Ein Gleiter bewegt sich auf einer horizontalen Bahn. Man berücksichtigt die Reibung mit der Bahn. Formulieren Sie die beiden Impulsbilanzen für den Gleiter für die horizontale und für die vertikale Richtung in momentaner Form.
 - Wie lautet die Ladungsbilanzgleichung für eine Spule (Induktor mit Widerstand) in einer elektrischen Schaltung?
 - Formulieren Sie die momentane Bilanzgleichungen für Ladung und für chemische Stoffe einer Batterie.
6. Ein Photovoltaikpanel von 1.0 m^2 Fläche wird einer konstanten Sonnenstrahlung mit einem Energiestrom von 800 W/m^2 ausgesetzt. Anfangs hat das Panel mit seinen Zellen Umgebungstemperatur (300 K).
- Das Panel hat eine Wärmekapazität (Energiekapazität) von 1000 J/K . Der Absorptionsgrad für Sonnenlicht beträgt 0.85 . Der Emissionsfaktor des Panels für Wärmestrahlung ist 1 . Energie geht auch direkt an die Luft weg (der Wärmeübergangskoeffizient beträgt $12 \text{ W/(K}\cdot\text{m}^2)$).
- Das Panel hat einen elektrischen Wirkungsgrad, der mit der Temperatur linear abnimmt: Wirkungsgrad = $0.15 - b(T - T_a)$, $b = 1.667 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Der Wirkungsgrad wird durch das Verhältnis von elektrischer Leistung zu eingestrahltm Energiestrom definiert (nicht zum absorbierten!).
- Wie gross ist die elektrische Leistung gerade am Anfang?
 - Schreiben Sie das Bilanzgesetz für die Energie des Panels in allgemeiner (momentaner) Form auf.
 - Wie gross ist die Änderungsrate der Temperatur des Panels genau am Anfang?
 - Bestimmen Sie die sich nach einiger Zeit einstellende Stillstandstemperatur (stationäre Temperatur) des Panels.

- e. Skizzieren Sie so gut wie möglich die Temperatur und die elektrische Leistung des Panels als Funktionen der Zeit.
7. Quecksilber, das in einem Raum ausgeschüttet wird, verdampft ein bisschen. Man sagt, dass eine Konzentration von 0.1 mg Hg pro m^3 Luft während einer Arbeitswoche noch zulässig sei.
- Bei 25°C und einem Druck von 1.013 bar hat Quecksilberdampf (Gas) ein chemisches Potential von 31840 J/mol (siehe Tabelle 1). Das von flüssigem Hg ist 0 J/mol. Heisst das, dass flüssiges Quecksilber in einer reinen Hg-Atmosphäre noch weiter verdampft, oder umgekehrt, dass Hg-Dampf kondensiert (bei 25°C , 1.013 bar)? Warum?
 - Bestimmen Sie den Gleichgewichtsdruck (Dampfdruck) von Hg-Dampf bei 25°C . Behandeln Sie Hg-Dampf als ideales Gas. (Das ist dann der Druck von Hg Dampf in der Luft in einem Zimmer. Sie sollten einen Wert von 0.27 Pa erhalten.)
 - Wie gross ist damit die Gleichgewichtskonzentration in mg/m^3 ? Die Molmasse von Hg beträgt 200 g/mol. Wie lange dürfte man da während einer Woche arbeiten?
 - Wieviel mal grösser oder kleiner ist die Konzentration von Quecksilberdampf bei 35°C ?

Table 1: Mercury

	μ / kG	$\alpha / \text{G/K}$
<i>l</i>	0	- 76
<i>g</i>	31.84	- 175

8. Aus Beobachtungen der Schwingungsperiode eines Torsionspendels (Tabelle 2) sollen fehlende Parameter bestimmt werden. Das Pendel besteht aus einer in der Mitte gelagerten horizontale Stange (unbekanntes Trägheitsmoment J_s). Die Achse ist an einer Torsionsfeder angemacht (unbekannte Federkonstante D). Auf der Stange sind zwei Gewichte bekannter Masse in bestimmten Abständen angemacht (Tabelle 2).
- Leiten Sie die Gleichung her, mit der man das Trägheitsmoment der Konfiguration aus Stange und zwei Gewichten (Masse 200 g pro Gewicht) berechnet. Im Modell nehmen Sie an, dass die Gewichte sehr dünn im Vergleich zum Abstand d von der Rotationsachse sind.
 - Wie hängt die Rotationsperiode von Trägheitsmoment und Federkonstante ab? Und damit von J_s , d und D ?
 - Zeichnen Sie ein Diagramm mit den Daten, wobei Sie die *Periode im Quadrat* gegen den *Abstand im Quadrat* auftragen.
 - Benutzen Sie die Daten im Diagramm, um die Federkonstante und das Trägheitsmoment der Stange zu bestimmen.

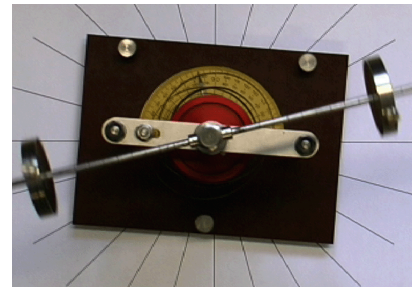


Table 2: Torsion pendulum

<i>d</i> / cm	<i>T</i> / s
8.0	1.92
12.0	2.56
16.0	3.24
20.0	3.96

ASSESSMENTPRÜFUNG 2006

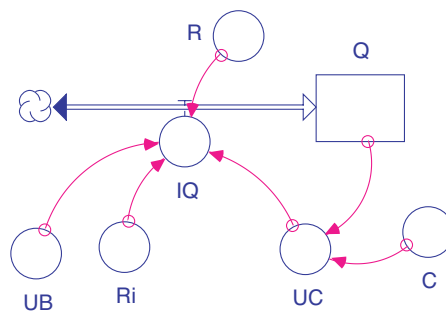
Blatt 1		Abteilung:	DP
		Jahr:	2006
		Experten:	
Klassen:	DP05a	Datum:	6.9.2005
Lehrer:	Fuh	Zeit:	8:00 – 11:00

LÖSUNGEN ZUR SCHRIFTLICHE PRÜFUNG IN PHYSIK

ERLAUBTE HILFSMITTEL: Eigene Zusammenfassung und Bücher, Taschenrechner

1. Charging capacitor

a.



b.

$$\begin{aligned}
 dQ/dt &= I_Q \\
 \text{INIT } Q &= 0 \\
 I_Q &= (U_B - U_C)/(R + R_i) \\
 U_C &= Q/C
 \end{aligned}$$

c. Toward the end of the measurement period we have $dQ/dt = 0$, $I_Q = 0$, therefore $U_B = U_C$. $U_C = 4.5 \text{ V}$ (from graph).

d. Time when 63% of final value of the voltage has been reached: $\tau = 0.0030 \text{ s} = 3.0 \text{ ms}$.

Verteiler

Spätestens bis Prüfungsbeginn: je ein Exemplar pro Abteilung z.H. Archiv

e. Using the original data, we can determine the combination

$$\tau = RC = (R_i + R)C$$

This means, we need two more independent determinations. There are different possibilities. Here are two examples:

A. Experiment 1: Connect R to power supply. Determine R by using voltmeter and A-meter:

$$R = U_{Source} / I_Q$$

Experiment 2: Connect only R to battery. Measure terminal voltage U_k of battery:

$$I_Q = U_k / R$$

$$R_i = (U_B - U_k) / I_Q$$

Determine C from time constant:

$$C = \tau / (R_i + R)$$

B. Experiment 1: Connect R to power supply. Determine R by using voltmeter and A-meter:

$$R = U_{Source} / I_Q$$

Experiment 2: Determine C from a discharge experiment (C connected to R):

$$C = \tau_{Discharge} / R$$

Determine R_i from original τ :

$$R_i = \tau / C - R$$

2. House

a. The house "charges" like a capacitor. Its temperature goes from 25°C to 35°C. After 1 time constant, the temperature should be 25°C + 0.63·(35 – 25)°C = 31.3°C. Therefore, the time constant is 10 h.

$$\tau = R_w C = \frac{1}{G_w} C \Rightarrow C = G_w \tau = 300 \cdot 10 \cdot 3600 \frac{\text{J}}{\text{K}} = 10.8 \frac{\text{MJ}}{\text{K}}$$

b. $I_S = I_W / T_{inside}$:

$$I_S = \frac{I_W}{T_{inside}} = \frac{G_w (T_{outside} - T_{inside})}{T_{inside}} = \frac{300(35 - 25)}{25 + 273} \frac{\text{W}}{\text{K}} = 10.1 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

c. The entropy current calculated in b must be pumped out: $P = (T_{outside} - T_{inside}) \cdot I_S = 10 \cdot 10.1 \text{ W} = 101 \text{ W}$.

$$\begin{aligned} P &= (T_{outside} - T_{inside}) I_S = (T_{outside} - T_{inside}) \frac{G_w (T_{outside} - T_{inside})}{T_{inside}} \\ &= \frac{(35 - 25) \cdot 300 (35 - 25)}{25 + 273} \text{ W} = 101 \text{ W} \end{aligned}$$

d. The entropy current arriving at 10°C must be pumped to 45°C:

$$\begin{aligned} P &= (T_{high} - T_{low}) I_{S,low} = (T_{high} - T_{low}) \frac{G_w (T_{outside} - T_{inside})}{T_{low}} \\ &= \frac{(45 - 10) \cdot 300 (35 - 25)}{10 + 273} \text{ W} = 371 \text{ W} \end{aligned}$$

3. Train buffer

a. Energy balance:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}D(\Delta x)^2$$
$$D = \frac{mv^2}{(\Delta x)^2} = \frac{10000 \cdot 5^2}{0.5^2} \frac{\text{N}}{\text{m}} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

b. Compressive phase lasts for 1/2 of a period of oscillation of the harmonic oscillator:

$$\Delta t = \frac{1}{2}T = \pi \sqrt{\frac{m}{D}} = \pi \sqrt{\frac{10^4}{10^6}} = \frac{\pi}{10} \text{ s} = 0.314 \text{ s}$$

c. During the phase of shortening of the spring (first half of the compression phase), the effect of damping is represented by a force pointing in the same direction as the force of the spring. During the second part of the collision (stretching of the spring) the damping force points in the opposite direction of the force of the spring.

This explains the jump of the acceleration of the car at about 1.04 s. The jump measures $a_2 - a_1 = 20 \text{ m/s}^2$. Since

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{m}(F_{\text{tot},2} - F_{\text{tot},1})$$
$$= \frac{1}{m}((F_{\text{spring}} + F_{\text{damping}}) - (F_{\text{spring}} - F_{\text{damping}})) = \frac{2F_{\text{damping}}}{m}$$
$$\Rightarrow F_{\text{damping}} = \frac{1}{2}m(a_2 - a_1) = 0.5 \cdot 10000 \cdot 20 \text{ N} = 10^5 \text{ N}$$

4. Inductive windkessel

a. Law of balance: there are two flows with respect to the container. Rate of change of IV1 is determined by the inductive effect:

$$\frac{dV}{dt} = I_{V1} - I_{V2}$$
$$\frac{dI_{V1}}{dt} = \frac{1}{L} \Delta p_L$$

b. Other constitutive laws (capacitive, resistive for IV2, loop rule pipe 1, loop rule pipe 2):

$$\Delta p_C = \frac{1}{C} V$$
$$I_{V2} = \frac{1}{R} \Delta p_R$$
$$\Delta p_L = \Delta p_P - \Delta p_C$$
$$\Delta p_R = \Delta p_C$$

c. We need initial values for V and IV1:

$$V(0) = V_0$$
$$I_{V1}(0) = I_{V1,0}$$

d. Insert constitutive laws into differential equations, change variables from (V,IV1) to (dpC,IV1):

$$\frac{d\Delta p_C}{dt} = \frac{1}{C} \left(I_{V1} - \frac{1}{R} \Delta p_C \right)$$

$$\frac{dI_{V1}}{dt} = \frac{1}{L} (\Delta p_P - \Delta p_C)$$

e. The system is linear:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Delta p_C}{dt} \\ \frac{dI_{V1}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{CR} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p_C \\ I_{V1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Delta p_P}{L} \end{pmatrix}$$

5. Laws of balance

a. Bodies in thermal contact:

$$\frac{dS_1}{dt} = -I_{S1} + \Pi_{S1}$$

$$\frac{dS_2}{dt} = I_{S2} + \Pi_{S2}$$

$$I_{S2} = I_{S1} + \Pi_{SR}$$

b. Migration does not turn up in the combined law of balance:

$$\Delta E = E_{born,1} + E_{born,2} + E_{died,1} + E_{died,2}$$

c. Newton's law for the horizontal and for the vertical directions:

$$\dot{p}_x = -F_R$$

$$0 = F_N - F_G$$

d. A solenoid does not store charge:

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

e. We assume a simple chemical reaction $A \rightarrow B$:

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\frac{dn_A}{dt} = -\Pi_{nA}$$

$$\frac{dn_B}{dt} = \Pi_{nA}$$

6. Photovoltaics

a. At the beginning, $T = T_a$, the electric power is

$$P_{el} = \eta G_{Sun} = 0.15 \cdot 800 \text{ W} = 120 \text{ W}$$

b. Energy is absorbed from solar radiation. It is emitted radiatively and convectively, and as the result of the electric process:

$$C \frac{dT}{dt} = \alpha G_{Sun} - \eta G_{Sun} - Ah_{conv}(T - T_a) - A\sigma(T^4 - T_a^4)$$

c. Since $T(0) = T_a$, the balance of energy reads

$$C \frac{dT}{dt} = \alpha G_{Sun} - \eta G_{Sun}$$

Therefore:

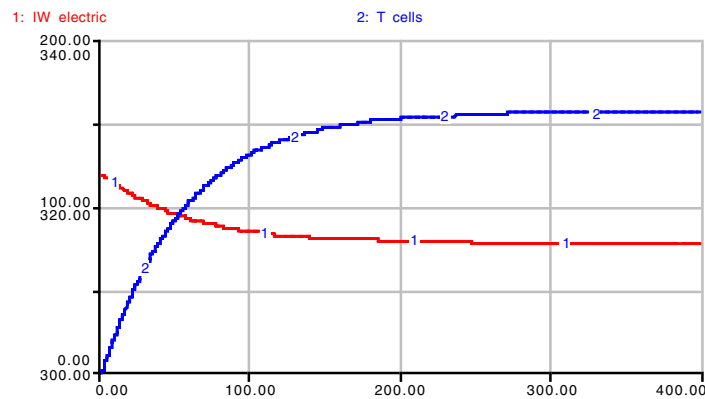
$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha G_{Sun} - \eta G_{Sun}}{C} = \frac{(0.85 - 0.15) \cdot 800 \text{ K}}{1000 \text{ s}} = 0.56 \frac{\text{K}}{\text{s}}$$

d. Steady-state temperature for $dT/dt = 0$. This yields a nonlinear equation for T:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha G_{Sun} - \eta G_{Sun} - Ah_{conv}(T - T_a) - A\sigma(T^4 - T_a^4) \\ &= \alpha G_{Sun} - (0.15 - b(T - T_a))G_{Sun} - Ah_{conv}(T - T_a) - A\sigma(T^4 - T_a^4) \\ 0.85 \cdot 800 &= (0.15 - 1.667 \cdot 10^{-3}(T - 300)) \cdot 800 + 1.12(T - 300) + 1.5.67 \cdot 10^{-8}(T^4 - 300^4) \end{aligned}$$

The pertinent solution is $T = 331.4 \text{ K}$.

e. With $T_{final} = 331.4$, the electric power at the end is $P_{el} = (0.15 - 1.667 \cdot 10^{-3}(331.4 - 300)) \cdot 800 \text{ W} = 78 \text{ W}$. Having the initial and final level of T and P_{el} , and the rate of change of T at the beginning, the curves can be sketched.



7. Mercury

a. The chemical potential of pure gaseous Hg is higher than that of a pure liquid of Hg (at 25°C and 1.013 bar). Therefore, Hg gas will condense into liquid Hg.

b. The chemical potential of gaseous Hg must be equal to that of liquid Hg (at 25°C). Therefore:

$$\mu_{\text{Hg},l} = \mu_{\text{Hg},g} + RT \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$$
$$p = p_0 \exp\left(\frac{\mu_{\text{Hg},l} - \mu_{\text{Hg},g}}{RT}\right) = 1.013 \cdot 10^5 \exp\left(\frac{0 - 31840}{8.314 \cdot 298}\right) = 0.27 \text{ Pa}$$

This is the part of the pressure of the air in the room due to mercury vapor.

c. Equation of state of the ideal gas:

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{R}{M_o} \rho T$$
$$\rho = \frac{M_o p}{RT} = \frac{0.200 \cdot 0.27 \text{ kg}}{8.314 \cdot 298 \text{ m}^3} = 2.18 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 22 \frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$$

Since this is 220 times higher than the allowed maximal concentration, we could work only $40 \text{ hours} / 220 = 0.2$ hours per week in such an atmosphere.

d. The chemical potentials of liquid and gaseous Hg have to be equal at 35°C:

$$\mu_{\text{Hg},l} + \alpha_l \Delta T = \mu_{\text{Hg},g} + RT \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + \alpha_g \Delta T$$
$$p = p_0 \exp\left(\frac{\mu_{\text{Hg},l} + \alpha_l \Delta T - (\mu_{\text{Hg},g} + \alpha_g \Delta T)}{RT}\right)$$
$$= 1.013 \cdot 10^5 \exp\left(\frac{0 - 76 \cdot 10 - (31840 - 175 \cdot 10)}{8.314 \cdot 298}\right) = 0.40 \text{ Pa}$$

This value is higher than the one at 25°C by a factor of $40/27 = 1.5$.

8. Torsion oscillator

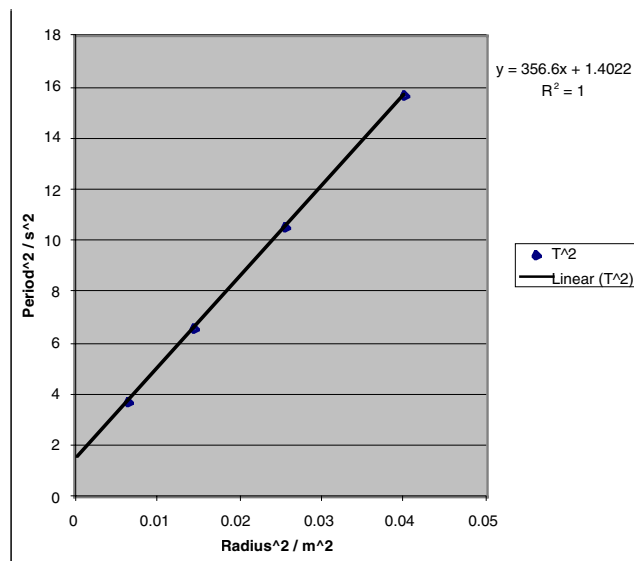
a. Two small bodies of mass m at distance d from axis have a moment of inertia of $2md^2$. So the total moment of inertia is

$$J = J_s + 2md^2$$

b.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_s + 2md^2}{D}}$$

c.



d. From b we have

$$T^2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 4\pi^2\left(\frac{J_s + 2md^2}{D}\right) = \frac{4\pi^2 J_s}{D} + \frac{8\pi^2 m}{D}d^2$$

Compare this to $y = 356.6x + 1.4022$ from the linear fit to the data in c. This yields two equations for D and J_s :

$$\frac{8\pi^2 m}{D} = 356.6 \frac{\text{kg}}{\text{N}\cdot\text{m}}$$

$$\frac{4\pi^2 J_s}{D} = 1.402 \frac{\text{Kg}\cdot\text{m}}{\text{N}}$$

The solution is $D = 0.0443 \text{ N}\cdot\text{m}$ and $J_s = 0.00157 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.